Aufgaben Digitale Modulationsverfahren

Aufgabe 1

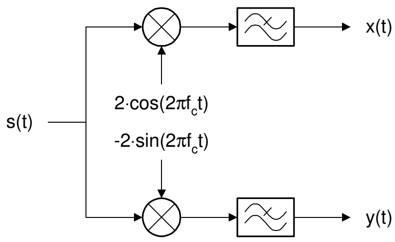
a) Bestimmen Sie die Quadraturkomponenten x(t) und y(t) des Bandpass-Signals

$$s(t) = \sin(2\cdot\pi\cdot f_c\cdot t + \Phi)$$

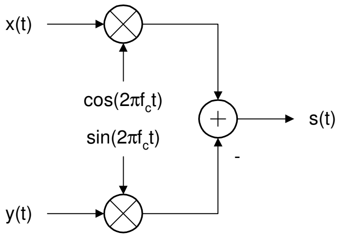
b) Bestimmen Sie die komplexe Umhüllende u(t). Zeigen Sie, dass gilt:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[u(t)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_c\cdot t}\right]$$

c) Zeigen Sie, dass die nachfolgende Schaltung ebenfalls die Quadraturkomponenten liefert.



d) Zeigen Sie, dass mit Hilfe der nachfolgenden Schaltung aus den Quadraturkomponenten wieder das Bandpass-Signal generiert werden kann.



Aufgabe 2

Gegeben ist ein AM-Signal:

$$s(t) = \left(1 + m\cdot\cos\left(\omega_M\cdot t\right)\right)\cdot\cos\left(\omega_c\cdot t + \varphi\right)$$

a) Bestimmen Sie dessen Quadraturkomponenten x(t) und y(t) für $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$ und $\varphi = \pi/2$.

b) Skizzieren Sie s(t), x(t) und y(t) für $\varphi = \pi/4$, $m = 1$, $\omega_M = 2\cdot\pi\cdot 1\ s^{-1}$, $\omega_c = 2\cdot\pi\cdot 10\ s^{-1}$.

c) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Umhüllenden $|\underline{u}(t)|$ für ein beliebiges φ.

Aufgabe 3

Ein mittelwertfreies, Gaussverteiltes Rauschsignal weist eine Standardabweichung von $\sigma = 2$ auf.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal genau den Wert 0 annimmt?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal kleiner als -0.5 ist?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal grösser als +0.5 ist?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag des Signals kleiner als 0.5 ist?

Aufgabe 4

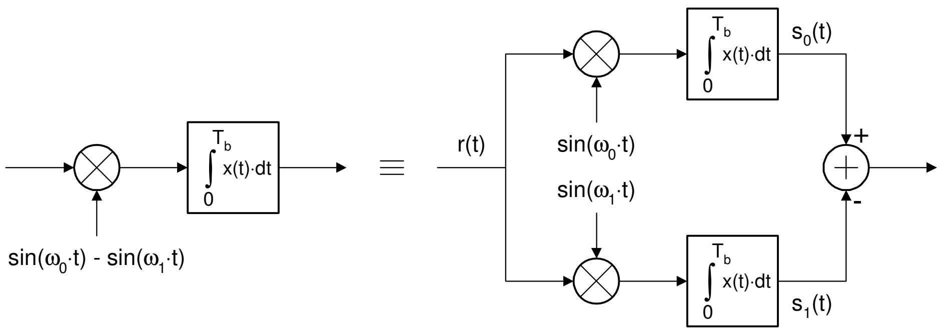
Die Bandbreite eines Übertragungskanals reicht gerade aus, um bei Verwendung von BPSK Daten mit einer Rate von $R_1 = 2.4$ kbit/s zu übertragen.

a) Wie gehen Sie vor, um über den gleichen Kanal Daten mit einer Raten von $R_2 = 9.6$ kbit/s zu übertragen?

b) Welche Nachteile müssen Sie dabei in Kauf nehmen?

Aufgabe 5

Die Funktionsweise des kohärenten FSK-Demodulators soll nachvollzogen werden.



a) Zeigen Sie, dass die in der obigen Figur behauptete Identität tatsächlich zutrifft.

b) Nehmen Sie an, es gelte $r(t) = \sin(\omega_0\cdot t)$. Berechnen Sie die Signale $s_0(t)$ und $s_1(t)$.

c) Wie vereinfacht sich das Resultat, wenn die Bitperiode T_b eine ganze Anzahl Schwingungen von $\sin(\omega_0\cdot t)$ und $\sin(\omega_1\cdot t)$ umfasst? Welche Bedingung muss dann gelten, damit $s_1(t) = 0$ ist?

Tip: $\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = 0.5\cdot(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

Aufgabe 6

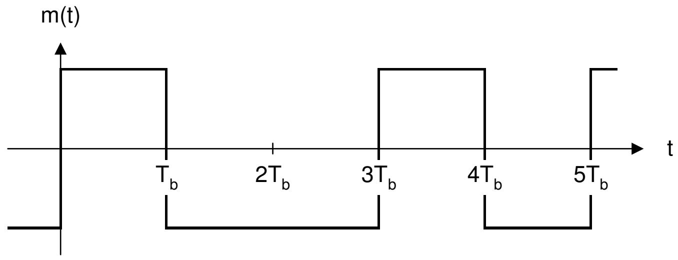
Gewisse Rauschprozesse werden durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{\sqrt{2}\cdot|x|}{\sigma}}$$

beschrieben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rauschsignal zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ liegt?

Aufgabe 7

Das binäre Datensignal m(t) ist entweder +1 oder -1 und ist jeweils während der Zeit T_b konstant. Ein Beispiel zeigt die nachfolgende Figur.



a) Zeigen Sie, dass ein BPSK-Signal entweder durch die Phasenmodulation

$$s(t) = A \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot m(t)\right)$$

oder durch die Amplitudenmodulation

$$s(t) = -A \cdot m(t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t)$$

beschrieben werden kann.

b) Berechnen Sie die dazugehörige komplexe Umhüllende $\underline{u}(t)$.

c) Die Berechnung der Leistungsdichte von $\underline{u}(t)$ ergibt

$$P_u(f) = A^2 \cdot T_b \cdot \left(\frac{\sin(\pi \cdot f \cdot T_b)}{\pi \cdot f \cdot T_b}\right)^2$$

Skizzieren Sie deren Verlauf.

d) Die spektrale Leistungsdichte des BPSK-Signals ergibt sich aus der Leistungsdichte der komplexen Umhüllenden mit der Beziehung

$$P_s(f) = \frac{1}{4} \cdot \left[P_u(f - f_c) + P_u(-f - f_c)\right]$$

Skizierren Sie deren Verlauf.

e) Welche Bandbreite belegt das BPSK-Signal s(t), wenn man als Mass den Abstand der dem Träger am nächsten gelegenen Nullstellen im Spektrum nimmt?

Aufgabe 8

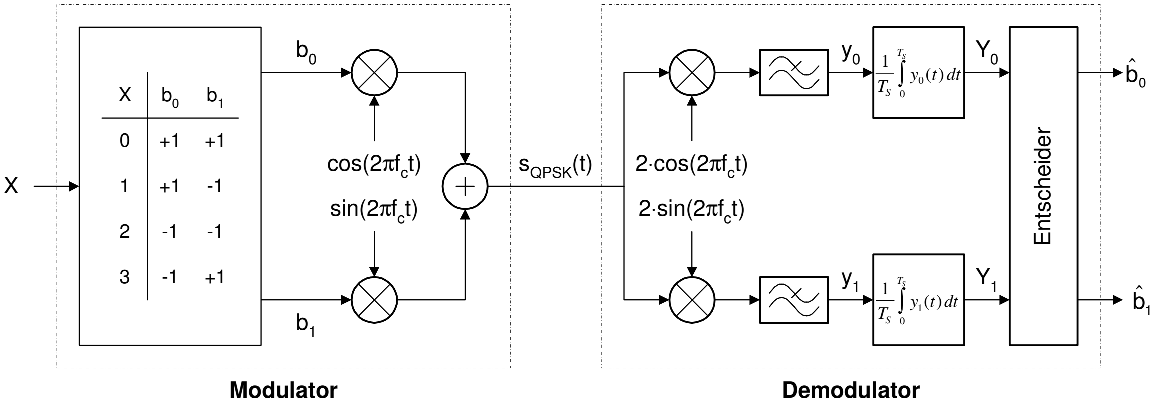
Ein einfaches Übertragungssystem arbeitet mit binärer Frequenzumtastung (BFSK) und inkohärenter Demodulation.

a) Geben Sie mehrere, grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten an, um die Bitfehlerwahrscheinlichkeit (bei gleichbleibendem Signal-zu-Rauschverhältnis pro Bit) zu verbessern.

b) Welche Nachteile in Bezug auf Bandbreiteneffizienz und Realisierungsaufwand müssen Sie jeweils in Kauf nehmen?

Aufgabe 9

Gegeben ist ein System zur Übertragung eines vierwertigen Symbols $X \in \{0, 1, 2, 3\}$. Die Zeitdauer um ein einzelnes Symbol zu übertragen beträgt T_S. Die beiden Tiefpässe weisen eine Grenzfrequenz $f_g = f_c$ auf und können als ideal betrachtet werden.



a) Skizzieren Sie für jeden der vier Werte von X den zeitlichen Verlauf des Sendesignals $s_{QPSK}(t)$. Wählen sie dazu $f_c = 2/T_S$.

b) Zeichnen Sie das Phasenzustandsdiagramm des Modulators. Bezeichnen Sie jeden Signalpunkt mit dem dazugehörigen Symbol.

c) Berechnen Sie für jeden der vier Werte von X die Werte der beiden Entscheidungsvariablen Y_0 und Y_1.

d) Die beiden Entscheidungsvariablen Y_0 und Y_1 werden je durch ein additives Rauschen mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_X(x) = e^{-\frac{|x|}{0.5}}$$

gestört. Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der verrauschten Entscheidungsvariablen für jeden der vier Werte von X.

e) Stellen Sie die Entscheidungsregeln auf, um aus den beiden verrauschten Variablen Y_0 und Y_1 die gesendeten Werte von b_0 und b_1 zu schätzen.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet sich der Demodulator für $\hat{b}_0 = +1$, wenn $b_0 = -1$ gesendet wurde?

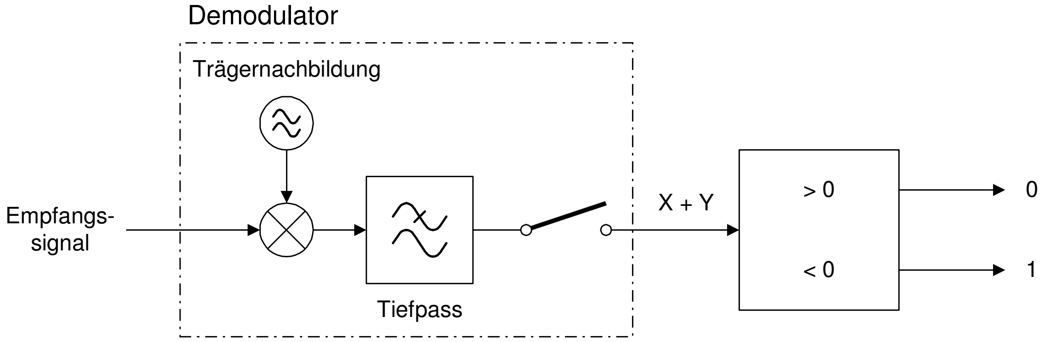
Aufgabe 10

Über einen AWGN-Kanal werden digitale Daten mittels binärer Phasenumtastung (BPSK) übertragen.

a) Die Bandbreiteneffizienz soll verdoppelt werden. Welches ist Ihrer Ansicht nach die beste Methode um dies zu erreichen und weshalb?

b) Die Bandbreiteneffizienz soll nochmals verdoppelt werden. Nennen Sie einige Möglichkeiten um dies zu erreichen. Wo liegen die jeweiligen Vor- und Nachteile? Durch welche Massnahmen können die Nachteile verringert werden?

Aufgabe 11



Wir betrachten eine Übertragung mit binärer Phasenumtastung (BPSK). Im Demodulator wird aus dem Empfangssignal eine Entscheidungsvariable Y berechnet. Diese nimmt den Wert $Y_0 = +A/2$ an, falls eine 0 gesendet wurde und $Y_1 = -A/2$, falls eine 1 gesendet wurde. Zusätzlich ist der Grösse Y ein Rauschen X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \frac{c}{1+x^2}$$

überlagert. Die Entscheidung über das gesendete Bit wird anhand des Vorzeichens von X + Y gefällt.

a) Bestimmen Sie die Konstante c. (Falls Ihnen das nicht gelingt, rechnen Sie mit c = 1 weiter).

b) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der verrauschten Entscheidungsvariablen X + Y für den Fall, dass eine 0 gesendet wurde.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit falsch detektiert wird.

d) Um welchen Faktor ändert sich die Entscheidungsvariable Y, falls die Phasenlage der Trägernachbildung im Empfänger um den Winkel $\Delta\varphi$ abweicht?

Tipps:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$$

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Aufgabe 12

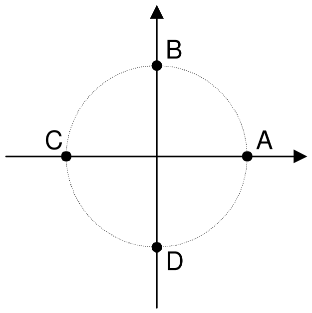
Bei einer 16-PSK-Modulation wird alle $T_{symbol} = 1\mu s$ ein Signalpunkt übertragen. Dazu wird ein Sinusträger mit einer mittleren Leistung von $P_{Träger} = 1$ W verwendet.

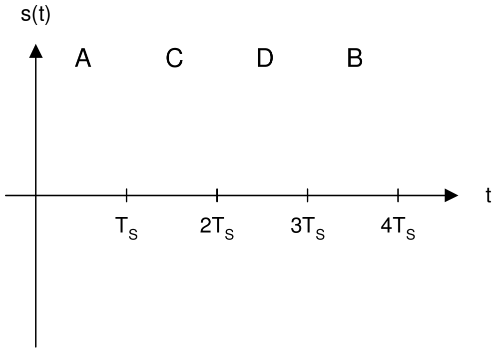
a) Wie hoch ist die Bitübertragungsrate?

b) Wie hoch ist das Signal-zu-Rauschverhältnis pro Bit für eine Rauschleistungsdichte $\eta = 25$ nW/Hz?

Aufgabe 13

Ein Modulationsverfahren ist durch sein Konstellationsdiagramm gegeben.





a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf des modulierten Signals, falls die Symbolfolge A, C, D, B gesendet wird. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass während einer Symboldauer T_S gerade eine Periode des sinusförmigen Trägers gesendet wird.

b) Geben Sie eine Zuordnung zwischen den Signalpunkten A, B, C und D und den übertragenen Bitpaaren an.

Aufgabe 14

Die Kanalkapazität des AWGN-Kanals ist gegeben durch:

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{E_b}{\eta} \cdot \frac{R}{B}\right)$$

Welches Signal-zu-Rauschverhältnis pro Bit ist minimal notwendig, um ein Bit zu übertragen?

Aufgabe 15

Ein analoger Telefoniekanal ist ein typisches Beispiel für einen schmalbandigen Kanal mit gutem Signal-zu-Rauschverhältnis.

a) Welche digitalen Modulationsverfahren sind hier bevorzugt anzuwenden?

b) Welchen Nachteil weisen diese Modulationsverfahren auf und welche Gegenmassnahmen sind denkbar?

c) In den frühen Modems wurde ausschliesslich FSK verwendet. Ihr Kommentar?

Aufgabe 16

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X ist mit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 1\right) & \text{für} \quad -1 \le x \le +1 \\ 1 & \text{für} \quad x > +1 \end{cases}$$

gegeben.

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte p(x).

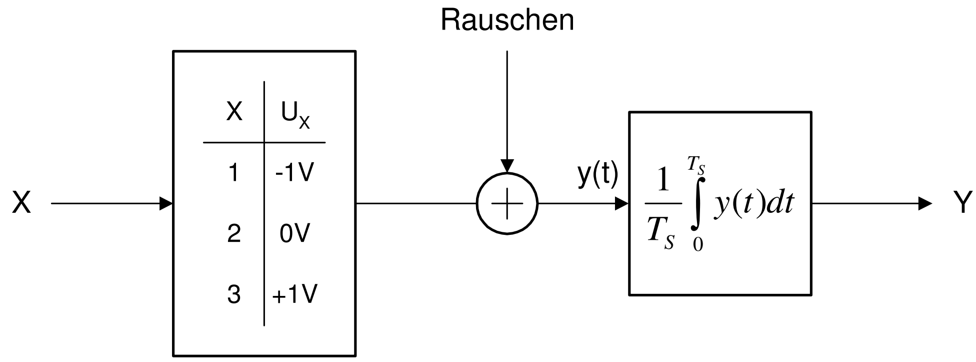
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag der Zufallsvariablen kleiner als 0.5 ist?

Aufgabe 17

a) Weshalb nimmt bei der Phasenumtastung die Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit steigender Anzahl Signalpunkte zu?

b) Woran liegt es, dass beim Übergang von zwei (BPSK) auf vier (QPSK) Signalpunkte keine Erhöhung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit resultiert?
Tipp: Welches ist die Voraussetzung, damit diese Aussage gilt?

Aufgabe 18



Wir betrachten eine dreiwertige Pulsamplitudenmodulation. Die drei Nachrichtensymbole werden mit den drei Spannungswerten U_1 = -1 V, U_2 = 0 V und U_3 = +1 V übertragen. Im Empfänger wird das Empfangssignal y(t) während einer Symbolperiode gemittelt. Der dadurch gewonnenen Entscheidungsvariable Y ist ein Rauschen mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = c \cdot e^{-|x|}$$

überlagert. Die Entscheidungsschwellen im Empfänger liegen bei ±0.5 V. Die Auftretenswahrscheinlichkeiten der drei Sendesymbole betragen $P(U_1) = 0.2$, $P(U_2) = 0.6$ und $P(U_3) = 0.2$.

a) Berechnen Sie die Konstante c.
Tipp: Falls Ihnen dies nicht gelingt, rechnen Sie mit c = 0.4 weiter.

b) Skizzieren Sie für jedes der drei Sendesymbole die Wahrscheinlichkeitsdichte der verrauschten Entscheidungsvariablen.

c) Berechnen Sie für jedes der drei Sendesymbole die Wahrscheinlichkeit eines Symbolfehlers.

d) Wie gross ist die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit?

e) Wo müssten die Entscheidungsschwellen gelegt werden, damit die Wahrscheinlichkeit eines Symbolfehlers für alle drei Sendesymbole gleich wäre?

f) Wie gross ist die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit mit den unter e) berechneten Entscheidungsschwellen?

Aufgabe 19

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X ist mit

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{3}{4}\cdot\left(1-x^2\right) & \text{für} \quad -1 \le x \le +1 \\ 0 & \text{für} \quad x > +1 \end{cases}$$

gegeben.

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung F(x).

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen grösser als 0.5 ist?

Aufgabe 20

In einem System zur Übertragung von digitaler Information werden die beiden nachfolgenden Sendesignale verwendet. Diese Signale werden jeweils während einer Bitperiode T_b ausgestrahlt.

$s_0(t) = 0$ Zur Übertragung einer binären 0.

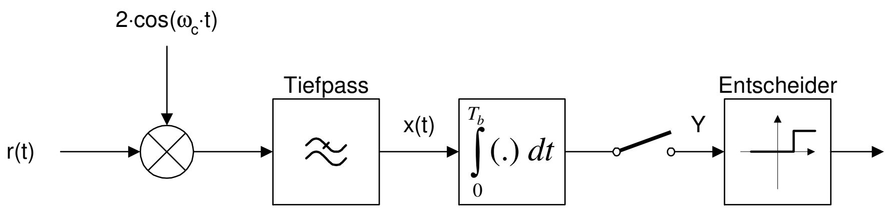
$s_1(t) = A \cdot \cos(\omega_c \cdot t)$ Zur Übertragung einer binären 1.

a) Bestimmen Sie für beide Sendesignale deren Quadraturkomponenten [Inphase x(t), Quadraturphase y(t)].

b) Zeichnen Sie das Phasenzustandsdiagramm des Modulators. Bezeichnen Sie jeden Signalpunkt mit dem dazugehörigen Bit.

c) Wie gross ist die durchschnittliche Energie E_b für die Übertragung eines Bits, falls beide Signale gleich häufig auftreten?

Der Empfänger ist wie folgt aufgebaut



d) Bestimmen Sie für die beiden Sendesignale je den Verlauf des Signals x(t) und den Wert der Entscheidungsvariablen Y.

Die Entscheidungsvariable Y wird von einem mittelwertfreien Rauschen mit gegebener Wahrscheinlichkeitsdichte p(x) und gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung F(x) überlagert. Die Entscheidungsschwelle im Entscheider liegt genau in der Mitte zwischen den beiden unter d) berechneten Werten von Y.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Bitfehler, falls eine 1 gesendet wurde.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Bitfehler, falls eine 0 gesendet wurde.

Im folgenden wird angenommen, dass das mittelwertfreie Rauschen Gaussverteilt ist mit der gegebenen Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\eta \cdot T_b}$.

g) Drücken Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit durch die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

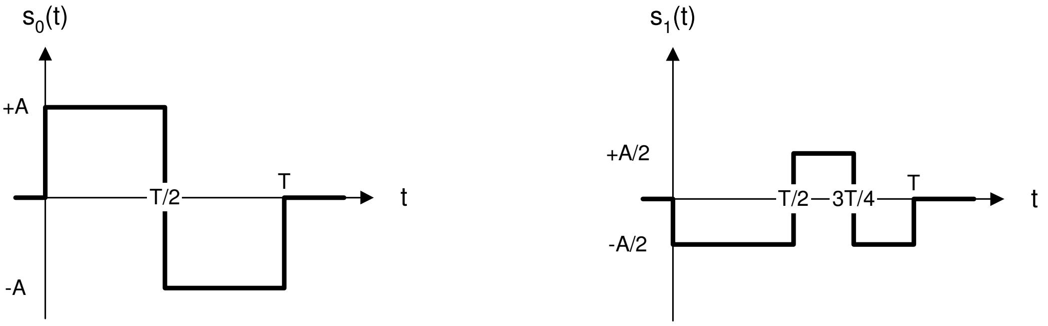
aus. Formen Sie den Ausdruck so um, dass als Argument das Signal-zu-Rauschverhältnis pro Bit, E_b/η, auftritt.

Beachte: Wegen $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ist in diesem Fall die Bitfehlerwahrscheinlichkeit nicht vom gesendeten Bit abhängig. (Die beiden Wahrscheinlichkeiten sind gleich).

h) Um wie viele Dezibel muss bei der vorliegenden Modulationsart das Signal-zu-Rausch-verhältnis pro Bit (E_b/η) höher sein, um die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit wie mit BPSK zu erhalten?

Tipp: $$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos(2\cdot\alpha)\right)$$

Aufgabe 21

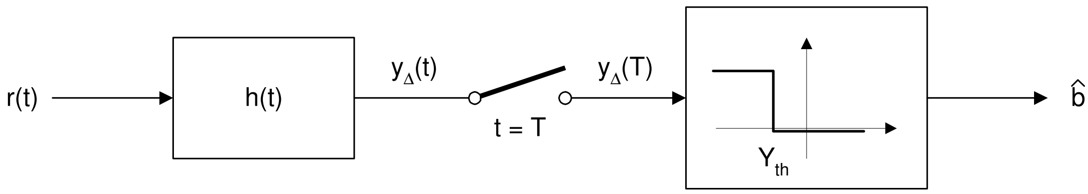


Gegeben sind die zwei Pulsformen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ der Dauer T, welche zur Übertragung des binären Symbols b verwendet werden. Das Sendesignal s(t) wird nach der Regel

$$s(t) = \begin{cases} s_0(t) & \text{falls } b = 0 \\ s_1(t) & \text{falls } b = 1 \end{cases}$$

gewählt und während der Übertragung durch weisses, Gaussverteiltes Rauschen der Leistungsdichte $\eta/2$ gestört, woraus sich das Empfangssignal r(t) ergibt.

Für den Empfänger wird die folgende Struktur gewählt:

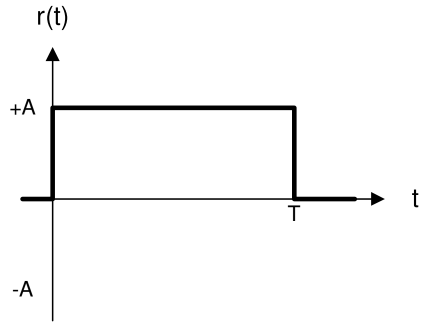


a) Skizzieren Sie die Impulsantwort h(t) des Eingangsfilters, welches die kleinste Bitfehlerwahrscheinlichkeit liefert.

b) Wie gross muss der Schwellwert Y_{th} idealerweise gewählt werden?

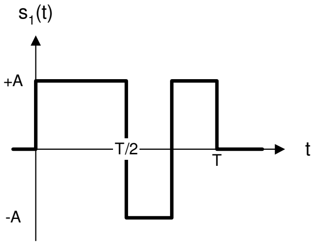
c) Geben Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des Übertragungssystems in Funktion der Parameter A, T und η an.

d) Geben Sie den Wert der Entscheidungsvariablen $y_\Delta(T)$ für das nachfolgende Empfangssignal r(t) an. Für welchen Wert $\hat{b}$ entscheidet sich der Empfänger in diesem Fall?



e) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Grösse $y_\Delta(t)$ für das unter d) gegebene Empfangssignal.

Aufgabe 22



Gegeben ist die Pulsform $s_1(t)$ der Dauer T, welche zur Übertragung des binären Symbols b verwendet wird. Das Sendesignal s(t) wird nach der Regel

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } b = 0 \\ s_1(t) & \text{falls } b = 1 \end{cases}$$

gewählt und während der Übertragung durch weisses, Gaussverteiltes Rauschen der Leistungsdichte $\eta/2$ gestört, woraus sich das Empfangssignal r(t) ergibt.

a) Entwerfen Sie einen Empfänger, der mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit eine korrekte Schätzung des gesendeten Symbols b liefert. Skizzieren Sie dessen Struktur sowie die Impulsantwort des Eingangsfilters. Geben Sie die Entscheidungsregel zur Schätzung des gesendeten Symbols an (inkl. Schwellwert).

b) Geben Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des Übertragungssystems in Funktion der Parameter A, T und η an.

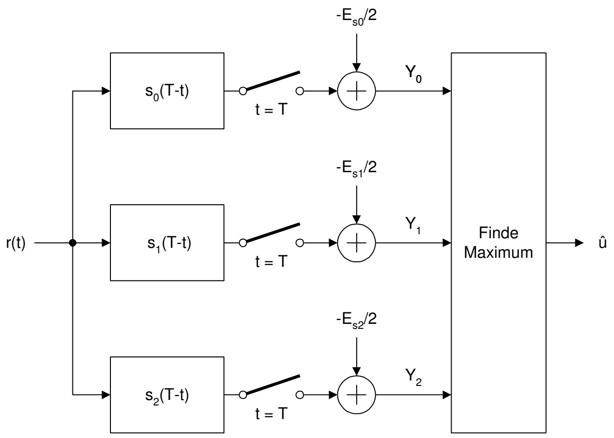
Der Sender wird so modifiziert, dass er zur Übertragung eines dreiwertigen Symbols u verwendet werden kann. Das Sendesignal wird neu nach der Regel

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u = 0 \\ s_1(t) & \text{falls } u = 1 \\ s_2(t) & \text{falls } u = 2 \end{cases}$$

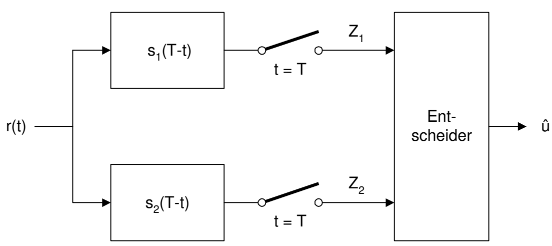
gewählt, wobei $s_2(t)$ orthogonal zu $s_1(t)$ ist und die gleiche Energie wie $s_1(t)$ besitzt.

c) Skizzieren Sie ein Beispiel für die Impulsform $s_2(t)$.

Zur Schätzung des gesendeten Symbols wird aus der allgemeinen Struktur (vgl. Skript) in Figur 1 die vereinfachte Empfängerstruktur in Figur 2 abgeleitet.



Figur 1



Figur 2

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Entscheidungsvariablen Y_0, Y_1 und Y_2 in Figur 1 und den Entscheidungsvariablen Z_1 und Z_2 in Figur 2?

e) Formulieren Sie für den Empfänger in Figur 2 die Entscheidungsregeln. Skizzieren Sie in der Z_1-Z_2-Ebene die Gebiete, in denen sich der Empfänger für $\hat{u} = 0$, $\hat{u} = 1$ oder $\hat{u} = 2$ entscheidet.

f) Wir nehmen an, das Symbol $u = 0$ wurde gesendet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Empfänger korrekt entscheidet.

Tipp: Die beiden Entscheidungsvariablen Z_1 und Z_2 sind in diesem Fall zwei voneinander unabhängige, Gaussverteilte Zufallsvariablen mit dem Mittelwert $m_{Z1} = m_{Z2} = 0$ und der Varianz

$$\sigma_{Z_1}^2 = \sigma_{Z_2}^2 = \frac{\eta}{2} \cdot A^2 \cdot T$$

Aufgabe 23

Gegeben sind zwei Pulsformen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ der Dauer T, welche zur Übertragung des binären Symbols b verwendet werden.

$$s_0(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad s_1(t) = \begin{cases} \sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Sendesignal s(t) wird nach der Regel

$$s(t) = \begin{cases} s_0(t) & \text{falls } b = 0 \\ s_1(t) & \text{falls } b = 1 \end{cases}$$

gewählt und während der Übertragung durch weisses, Gaussverteiltes Rauschen der Leistungsdichte $\eta/2$ gestört, woraus sich das Empfangssignal r(t) ergibt.

a) Berechnen Sie die normierte Energie E_0 des Signals $s_0(t)$.

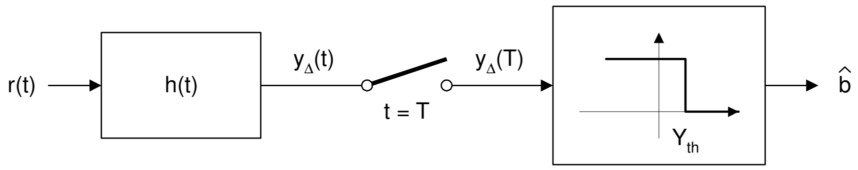
b) Berechnen Sie die normierte Energie E_1 des Signals $s_1(t)$.

c) Für welche Werte von α besitzen beide Signale die gleiche Energie?

d) Berechnen Sie den Kreuzkorrelationskoeffizienten ρ zwischen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ in Abhängigkeit des Parameters α.

e) Für welche Werte von α sind die beiden Signale orthogonal? Wie gross muss die Frequenzdifferenz der beiden Sinusschwingungen dazu minimal gewählt werden?

Der optimale Empfänger besteht aus einem Filter, einem Abtaster und einem Entscheider.



f) Geben Sie den Schwellwert Y_{th} in Funktion des Parameters α an.

g) Skizzieren Sie die Impulsantwort h(t) des Filters für $\alpha = 2$.

h) Für welches Symbol $\hat{b}$ entscheidet sich der Empfänger, falls r(t) = 1 am Eingang liegt? ($\alpha = 2$)

Tipps:

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot[1-\cos(2\cdot\alpha)]$$

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Aufgabe 24

Ein Bandpasssignal ist wie folgt gegeben:

$$s_{BP}(t) = \cos\left(\left(\omega_0 - \Delta\omega\right)\cdot t\right) + 2\cdot\cos\left(\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)\cdot t\right)$$

(Beachten Sie, dass die beiden Anteile unterschiedliche Amplituden aufweisen!)

a) Geben Sie die dazugehörige komplexe Umhüllende $\underline{u}(t)$ in Bezug auf die Trägerfrequenz ω_0 an.

Tipp:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Aufgabe 25

Tipp: Die Teilaufgaben n) und o) können ohne die Ergebnisse der Teilaufgaben k) bis m) gelöst werden.

Gegeben sind zwei Pulsformen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ der Dauer T, welche zur Übertragung des binären Symbols b verwendet werden.

$$s_0(t) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad s_1(t) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{2\cdot\pi}{T}\cdot t + \varphi\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Sendesignal s(t) wird nach der Regel

$$s(t) = \begin{cases} s_0(t) & \text{falls } b = 0 \\ s_1(t) & \text{falls } b = 1 \end{cases}$$

gewählt und während der Übertragung durch weisses, Gaussverteiltes Rauschen der Leistungsdichte $\eta/2$ gestört, woraus sich das Empfangssignal r(t) ergibt.

i) Berechnen Sie die normierte Energie E_0 des Signals $s_0(t)$.

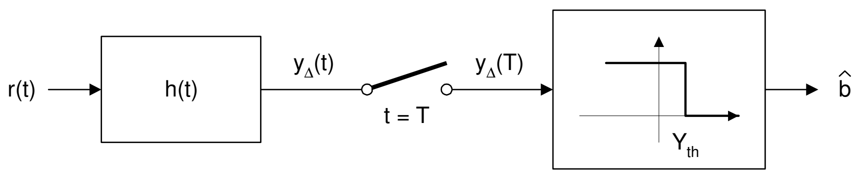
j) Berechnen Sie die normierte Energie E_1 des Signals $s_1(t)$.

k) Für welche Werte von φ besitzen beide Signale die gleiche Energie?

l) Berechnen Sie den Kreuzkorrelationskoeffizienten ρ zwischen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ in Abhängigkeit des Parameters φ.

m) Für welche Werte von φ sind die beiden Signale orthogonal?

Der optimale Empfänger besteht aus einem Filter, einem Abtaster und einem Entscheider.



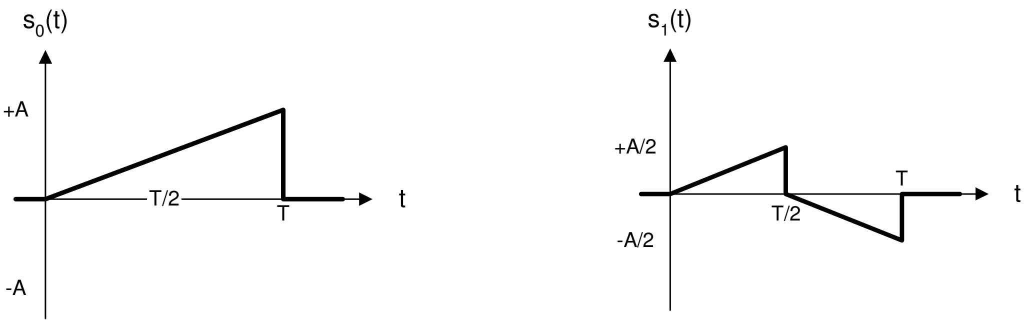
n) Geben Sie den Schwellwert Y_{th} in Funktion des Parameters φ an.

o) Skizzieren Sie die Impulsantwort h(t) des Filters für $\varphi = \pi/4$.

Tipps:

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(2\cdot\alpha)\right]$$
$$\sin(2\cdot k\cdot\pi+\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)$$
$$\sin\left(2\cdot k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

Aufgabe 26

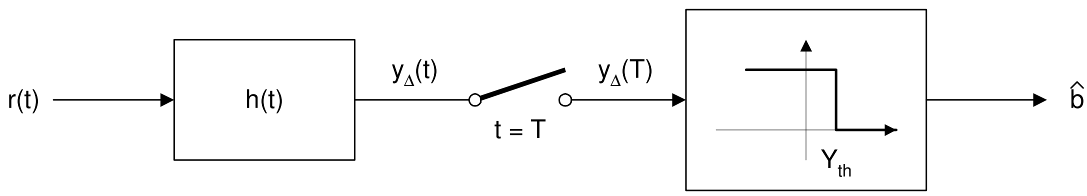


Gegeben sind die zwei Pulsformen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ der Dauer T, welche zur Übertragung des binären Symbols b verwendet werden. Das Sendesignal s(t) wird nach der Regel

$$s(t)=\begin{cases} s_0(t) & \text{falls } b=0 \\ s_1(t) & \text{falls } b=1 \end{cases}$$

gewählt und während der Übertragung durch weisses, Gaussverteiltes Rauschen der Leistungsdichte $\eta/2$ gestört, woraus sich das Empfangssignal r(t) ergibt.

Für den Empfänger wird die folgende Struktur gewählt:

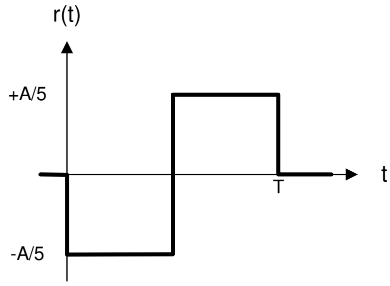


a) Skizzieren Sie die Impulsantwort h(t) des Eingangsfilters, welches die kleinste Bitfehlerwahrscheinlichkeit liefert.

b) Wie gross muss der Schwellwert Y_{th} idealerweise gewählt werden?

c) Geben Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des Übertragungssystems in Funktion der Parameter A, T und η an.

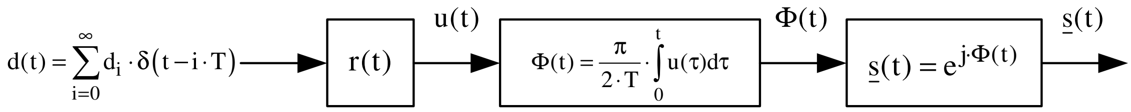
d) Geben Sie den Wert der Entscheidungsvariablen $y_\Delta(T)$ für das nachfolgende Empfangssignal r(t) an. Für welchen Wert $\hat{b}$ entscheidet sich der Empfänger in diesem Fall?



e) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Grösse $y_\Delta(t)$ für das unter d) gegebene Empfangssignal.

Aufgabe 27

Gegeben ist ein MSK-Sender, mit dem die binären Symbole $d_i \in \{-1,+1\}$ übertragen werden sollen.



Der Rechteckpuls r(t) ist gegeben durch

$$r(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<T\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

a) Skizzieren Sie u(t) für die in der folgenden Tabelle gegebene Datenfolge d_i.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
d_i	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1
$\underline{s}(i\cdot T)$	1 + 0 j							

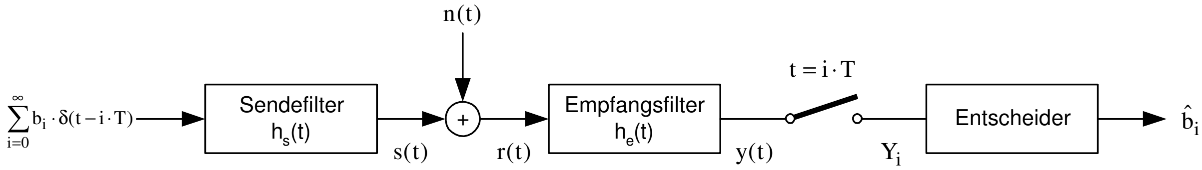
b) Skizzieren Sie $\Phi(t)$ für die in der Tabelle gegebene Datenfolge d_i.

c) Vervollständigen Sie die mit $\underline{s}(i\cdot T)$ bezeichnete Zeile der Tabelle.

d) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die komplexe Hüllkurve $\underline{s}(t)$. Markieren Sie mit 'X' die Zustände $\underline{s}(i\cdot T)$, die für gerade i auftreten können, und mit 'O' die Zustände $\underline{s}(i\cdot T)$, die für ungerade i möglich sind.

Aufgabe 28

Gegeben ist das nachfolgende Übertragungssystem.



Das Sendefilter habe die folgende Impulsantwort bzw. Übertragungsfunktion:

$$h_s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{H}_s(f) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-(\pi \cdot f \cdot \tau)^2}$$

Eine Datenquelle erzeugt (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) die binären Symbole $b_i \in \{+1, -1\}$ mit der Bitrate $R = 1/T$. Das Signal durchläuft zunächst das Sendefilter $h_s(t)$. Im Kanal wird zum Sendesignal s(t) das weisse, Gaussverteilte Rauschen n(t) mit der gegebenen Leistungsdichte

$$S_{nn}(f) = \frac{\eta}{2}$$

hinzuaddiert.

Zur Detektion im Empfänger dient das Empfangsfilter $h_e(t)$. Dahinter wird im Symboltakt R abgetastet und in einem Entscheider ein Schätzwert $\hat{b}_i$ für die gesendeten Daten gebildet.

Wir betrachten vorerst nur die Übertragung eines einzelnen Symbols, also $b_i = 0$ für $i \neq 0$.

a) Geben Sie für die beiden möglichen Symbolwerte $b_0 = +1$ und $b_0 = -1$ den zeitlichen Verlauf des jeweiligen Sendesignals s(t) an.

b) Berechnen Sie die Energie pro Bit, E_b, des Sendesignals s(t).

c) Wie sollte die Impulsantwort $h_e(t)$ des Empfangsfilters gewählt werden, damit die Schätzung eine möglichst kleinen Fehler aufweist? (Nehmen Sie dazu an, dass für die Schätzung des Symbols b_0 zum Zeitpunkt $t = 0 \cdot T$ abgetastet wird.)

d) Berechnen Sie mit der unter c) berechneten Impulsantwort den zeitlichen Verlauf des Signals y(t) für $b_0 = +1$.
Tipp: Bestimmen Sie zuerst die Gesamtübertragungsfunktion.
Die weiteren Aufgaben können auch ohne dieses Resultat gelöst werden.

e) Nach welcher Regel sollte der Entscheider den Schätzwert bestimmen? (Es ist also der Zusammenhang zwischen der Entscheidungsvariablen Y_i und dem Schätzwert $\hat{b}_i$ gefragt.)

f) Geben Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Funktion von E_b und η an.

Ab jetzt soll die Einschränkung $b_i = 0$ für $i \neq 0$ nicht mehr gelten, es werden also mehrere Impulse gesendet.

g) Ist mit dem gegebenen Sendefilter und dem unter c) berechneten Empfangsfilter eine intersymbolinterferenzfreie Übertragung prinzipiell möglich? Mit Begründung!

Tipp:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a \cdot x)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Aufgabe 29

Gegeben sind zwei Pulse der Dauer T:

$$s_0(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_1(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{3\cdot\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der beiden Pulse.

b) Berechnen Sie für jeden der beiden Pulse die Impulsantwort $h_i(t)$ des dazugehörigen matched Filters mit dem Abtastzeitpunkt t = T.

c) Berechnen Sie die zum Abtastzeitpunkt t = T an den Ausgängen der beiden matched Filter auftretenden Werte $y_{i|0}(T)$, falls an den Eingängen der Puls $s_0(t)$ anliegt.

d) Berechnen Sie die zum Abtastzeitpunkt t = T an den Ausgängen der beiden matched Filter auftretenden Werte $y_{i|1}(T)$, falls an den Eingängen der Puls $s_1(t)$ anliegt.

Tipps:

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot[1-\cos(2\cdot\alpha)]$$

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

Aufgabe 30

Die beiden Pulse aus Aufgabe 29 werden zur Übertragung des binären Symbols b verwendet.

$$s(t) = \begin{cases} s_0(t) & \text{falls } b = 0 \\ s_1(t) & \text{falls } b = 1 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den entsprechenden matched Filter Empfänger.

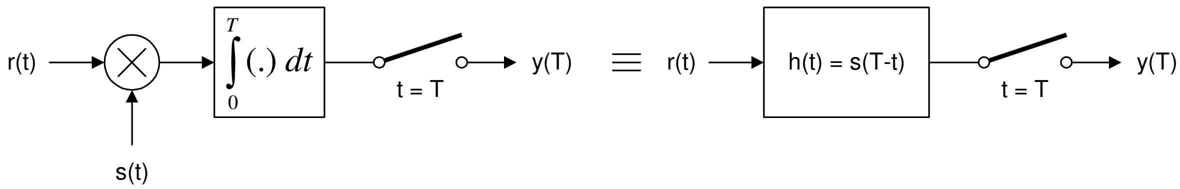
b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des im Empfänger vorkommenden Filters.

c) Gegeben Sie eine Formel zur Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit an, falls das Signal durch additives weisses Gaussverteiltes Rauschen der Rauschleistungsdichte $\eta/2$ gestört wird.

Aufgabe 31

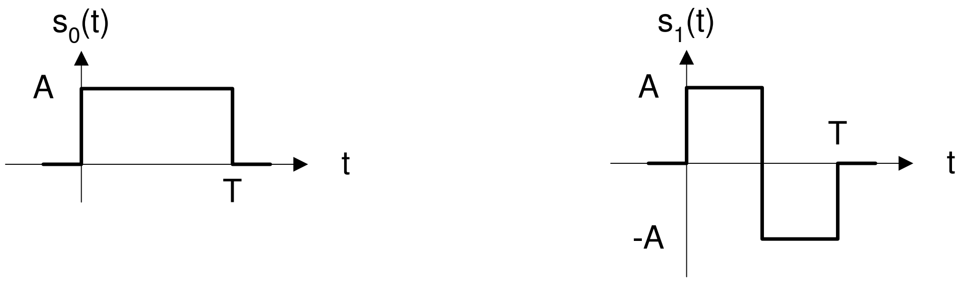
Gegeben ist ein auf das Intervall $0 \leq t \leq T$ beschränkter Puls s(t).

a) Zeigen Sie, dass die beiden nachfolgenden Schaltungen den gleichen Abtastwert y(T) liefern.



Aufgabe 32

Gegeben sind die beiden nachfolgenden Pulse $s_0(t)$ und $s_1(t)$.



a) Skizzieren Sie für beide Pulse die Impulsantwort des dazugehörigen matched Filters für den Abtastzeitpunkt t = T.

b) Skizzieren Sie für beide matched Filter den zeitlichen Verlauf des Ausgangsignals als Antwort auf $s_0(t)$ und $s_1(t)$.

c) Die beiden Pulse werden zur Übertragung von zweiwertigen Symbolen (Bits) benutzt. Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit, falls das Empfangssignal durch weisses, Gaussverteiltes Rauschen der Leistungsdichte $\eta/2$ gestört wird.