Aufgaben Kanalcodierung

Aufgabe 1

Wir betrachten den Hamming-Code mit $m = 5$ Prüfbits.

a) Wie gross ist die Blocklänge n dieses Codes?

b) Wie viele gültige Codewörter umfasst dieser Code?

c) Leiten Sie die fünf Gleichungen zur Berechnung der Prüfbits her.

d) Wie viele Bitfehler pro Codewort kann dieser Code korrigieren?

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein empfangenes Codewort nicht mehr korrigiert werden kann, wenn einzelne Bits mit der Wahrscheinlichkeit $P_b = 0.01$ falsch übertragen werden.

f) Das Binärwort (1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1) wurde empfangen. Ist dies ein gültiges Codewort und, falls nicht, an welcher Position würde der Decoder das Bit korrigieren?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass alle Hamming-Codes die Hamming-Grenze

$$m \geq \log_2\left(\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}\right)$$

exakt erreichen (Das heisst, in der angegebenen Gleichung gilt das Gleichheitszeichen). Ein Code mit dieser Eigenschaft wird als perfekt oder dichtgepackt bezeichnet.

Aufgabe 3

Ein linerarer Code ist durch seine Generatormatrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Erstellen Sie eine Codetabelle des vollständigen Codes.

b) Bestimmen Sie die Codematrix G' des dazugehörigen separierbaren Codes.

c) Wie gross ist die minimale Hamming-Distanz des Codes?

d) Stellen Sie die Gleichungen zur Berechung der Prüfbits explizit auf.

e) Zeigen Sie, dass der Code Einzelfehler und Büschelfehler der Länge b = 2 korrigieren kann.

Aufgabe 4

Ein linearer Code ist durch seine Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Stellen Sie die dazugehörige Prüfmattrix **H** auf.

b) Vervollständigen Sie die nachfolgenden Syndromtabelle

e	**s**
(1 0 0 0 0 0 0)	
(0 1 0 0 0 0 0)	
(0 0 1 0 0 0 0)	
(0 0 0 1 0 0 0)	
(0 0 0 0 1 0 0)	
(0 0 0 0 0 1 0)	
(0 0 0 0 0 0 1)	
(1 1 0 0 0 0 0)	
(0 1 1 0 0 0 0)	
(0 0 1 1 0 0 0)	
(0 0 0 1 1 0 0)	
(0 0 0 0 1 1 0)	
(0 0 0 0 0 1 1)	
(1 0 0 0 0 0 1)	

c) Wie lauten die zu den empfangenen Binärwörtern

$$\mathbf{r}_1 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1)$$

$$\mathbf{r}_2 = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$$

$$\mathbf{r}_3 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0)$$

berechneten Syndrome und welche gültigen Codewörter decodiert der Empfänger?

Aufgabe 5

Ein Reed-Muller-Code ist durch zwei Parameter m und r definiert. Die Blocklänge ergibt sich mit $n = 2^m$ aus dem ersten Parameter. Aus der Ordnung r des Codes resultiert mit Hilfe der Beziehung $d_{min}(C) = 2^{m-r}$ die minimale Hamming-Distanz.

Die Generatormatrix eines Reed-Muller-Codes setzt sich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_r \end{bmatrix}$$

Dabei ist $\mathbf{G}_0$ ein Zeilenvektor der Länge 2^m, der an jeder Stelle eine 1 enthält. $\mathbf{G}_1$ ist eine Matrix der Dimension m x 2^m, deren Spalten sämtliche binären m-Tupel enthalten[1]. Allgemein hat die Matrix $\mathbf{G}_i$ die Dimension $\binom{m}{i} \times 2^m$. Ihre Zeilen sind alle Produkte[2] von jeweils i Zeilen der Matrix $\mathbf{G}_1$.

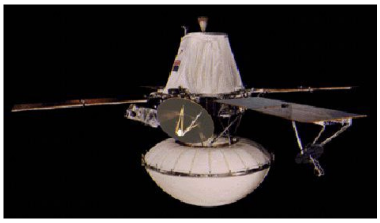
a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl Informationsbits an.

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl Prüfbits an.

c) Wie lautet die Generatormatrix für den Reed-Muller-Code mit m = 4 und r = 2?

d) Wie viele Bitfehler pro Codewort kann dieser Code korrigieren/erkennen?

e) Wieso macht ein Reed-Muller-Code mit m = r wenig Sinn?



Ein (32,6)-Reed-Muller-Code wurde 1976 bei der Viking-Mission zum Mars eingesetzt. Mit einer Sendeleistung von 20 W wurden damit nahezu 16000 Bilder vom Mars übertragen.

f) Geben Sie die Parameter m und r für den bei der Viking-Mission verwendeten Code an. Wie gross ist die minimale Hamming-Distanz?

[1] Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, wenden wir dabei die folgenden Regeln an: Ganz links ist die Spalte, welche aus lauter Nullen besteht. Von links nach rechts soll der durch das binäre m-Tupel repräsentierte Zahlenwert kontinuierlich zunehmen, wobei wir das LSB in der untersten Zeile wählen.

Beispiel für m = 3:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$$

[2] Dabei werden die Komponenten bitweise multipliziert

Beispiel für m = 3:

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Zeilenvektor mit fünf binären Komponenten:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$$

a) Wie lautet die polynomiale Darstellung $\mathbf{v}(X)$ dieses Vektors?

b) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{v}^{(3)}$, welcher durch zyklische Permutation von $\mathbf{v}$ um 3 Stellen nach links entsteht.

c) Durch welches Polynom $\mathbf{v}^{(3)}(X)$ wird der Vektor $\mathbf{v}^{(3)}$ repräsentiert?

d) Bestimmen Sie den Quotienten und den Rest bei der Divison von $X^3 \cdot \mathbf{v}(X)$ durch $X^5 \oplus 1$.

e) Welchen Zusammenhang erkennen Sie zwischen dem soeben berechneten Rest und dem Polynom $\mathbf{v}^{(3)}(X)$?

Aufgabe 7

Gegeben ist das Generatorpolynom eines zyklischen Codes mit n = 7, k = 4 und n - k = 3:

$$\mathbf{g}(X) = X^3 + X + 1$$

a) Bestimmen Sie die systematischen Codewörter für die Nachrichtenwörter

$$\mathbf{u}_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$
$$\mathbf{u}_2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$
$$\mathbf{u}_3 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0),$$
$$\mathbf{u}_4 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1).$$

b) Wie lautet die systematische Form der Generatormatrix des Codes?

c) Erstellen Sie eine Tabelle mit allen $2^k = 16$ Codewörtern und überzeugen Sie sich davon, dass der Code tatsächlich zyklisch ist.

Aufgabe 8

Ein zyklischer Code mit n = 7 und k = 3 besitzt das Generatorpolynom

$$\mathbf{g}(X) = X^4 \oplus X^3 \oplus X^2 \oplus 1$$

a) Prüfen Sie nach, ob die Binärwörter

$$\mathbf{r}_1 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$
$$\mathbf{r}_2 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

gültige Codewörter sind.

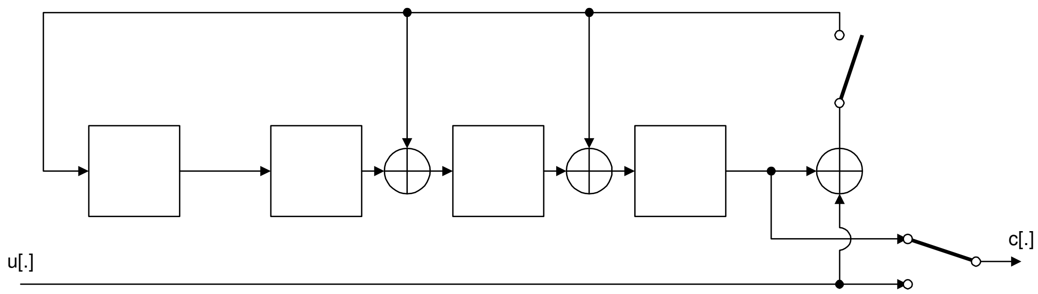
b) Bei der Übertragung des Codewortes $\mathbf{v}$ = (0 0 1 1 1 0 1) tritt der Fehler $\mathbf{e}$ = (0 1 0 0 0 0 0) auf. Wie lautet die polynomiale Darstellung $\mathbf{r}(X)$ des empfangenen Binärwortes?

c) Welches Resultat (Quotient und Rest) erhalten Sie, wenn Sie $\mathbf{r}(X)$ durch $\mathbf{g}(X)$ dividieren?

d) Ist das Restpolynom vom gesendeten Codewort abhängig?

Aufgabe 9

Gegeben ist ein systematischer Encoder für einen zyklischen Code mit der Blocklänge n = 7.



a) Bestimmen Sie das Generatorpolynom $\mathbf{g}(x)$ des Codes.

b) Aus wie vielen Nachrichten- und Prüfbits setzt sich ein Codewort zusammen?

c) Geben Sie die systematische Generatormatrix des Codes an.

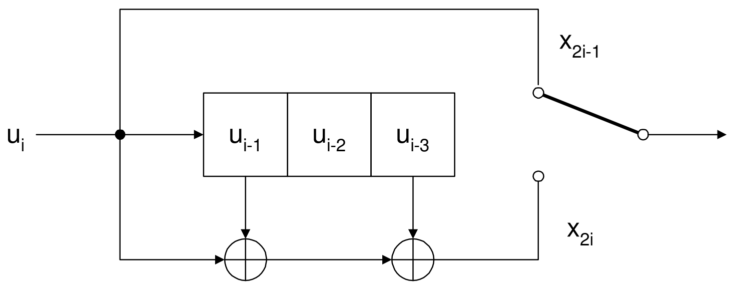
d) Was ist die minimale Hamming-Distanz des Codes?

e) Wieviele Fehler kann der Code mindestens erkennen/korrigieren?

f) Berechnen Sie den Syndromvektor für die empfangenen Binärworte $\mathbf{r}_1$ = (1 1 1 0 0 1 1) und $\mathbf{r}_2$ = (1 1 0 0 1 0 1).

Aufgabe 10

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode.



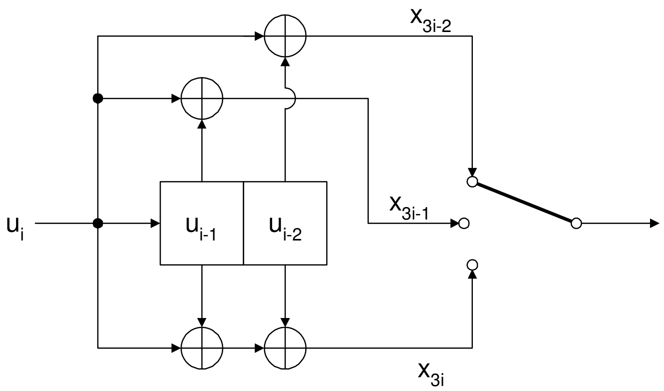
f) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.

g) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Encoders. Nehmen Sie dazu an, dass alle Schieberegister zu Beginn auf Null gesetzt werden.

h) Welche minimale Hamming-Distanz hat einen beliebige Codesequenz von der Codesequenz (00 00 00 ...)?

Aufgabe 11

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode.



a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.

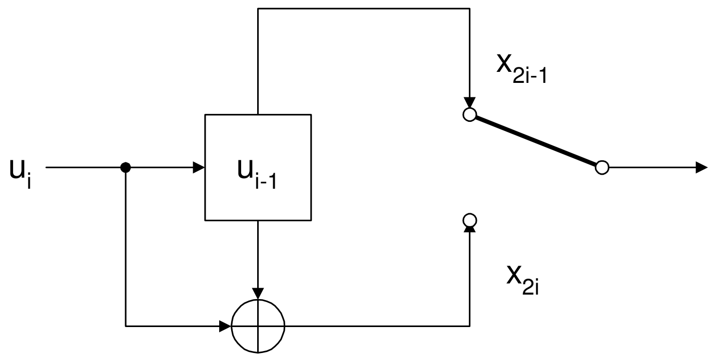
b) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Encoders. Nehmen Sie dazu an, dass alle Schieberegister zu Beginn auf Null gesetzt werden.

c) Welche Folge von Codebits x[.] gibt der Encoder für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 1 1 0 1) aus?

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus die Nachrichtensequenz der Länge 5, welche am besten zur empfangenen Sequenz r[.] = (101 100 110 011 011) passt.

Aufgabe 12

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode mit der Rate R = ½:



a) Zeichnen Sie das Trellis-Diagramm und das Zustandsdiagramm des Encoders.

b) Bestimmen Sie die minimale Distanz des Codes. (Zur Erinnerung: Dies ist gleich dem minimalen Hamminggewicht der von der Nullfolge verschiedenen Codefolgen).

Mit diesem Encoder sollen Blöcke von jeweils n = 8 Bits codiert werden. Zusätzlich wird ein neuntes Bit angehängt, dass immer den Wert 0 besitzt und dazu dient, den Encoder wieder in einen definierten Zustand zurückzuführen. In diesem Fall kann der Faltungscode auch als linearer Blockcode beschrieben werden.

c) Wie gross ist die Codewortlänge N?

d) Wie gross ist die minimale Hamming-Distanz dieses Blockcodes? (**Tipp:** Arbeiten Sie mit dem Trellisdiagramm!).

e) Wieviele Bitfehler pro Block kann der Code sicher korrigieren?

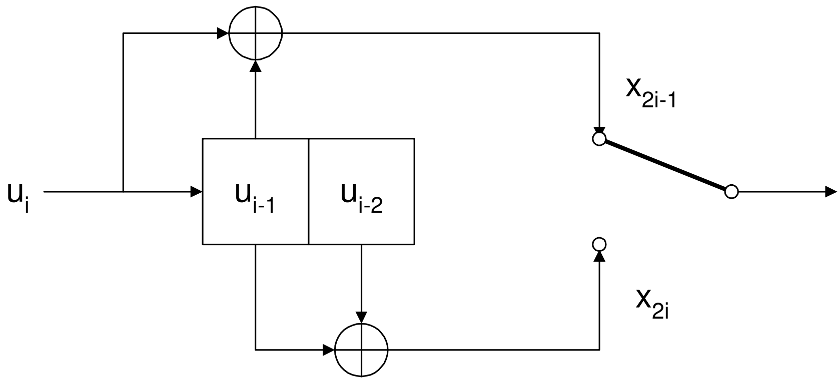
f) Welche Restfehlerwahrscheinlichkeit erhält man für einen betrachteten Block, wenn die Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P_b = 10^{-3}$ beträgt und wir davon ausgehen, dass der Code genau die unter e) berechneten Anzahl Bitfehler pro Block korrigieren kann?

g) Weshalb ist die tatsächlich beobachtete Restfehlerwahrscheinlichkeit kleiner?

h) Stellen Sie die Generatormatrix des Blockcodes auf!

Aufgabe 13

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode



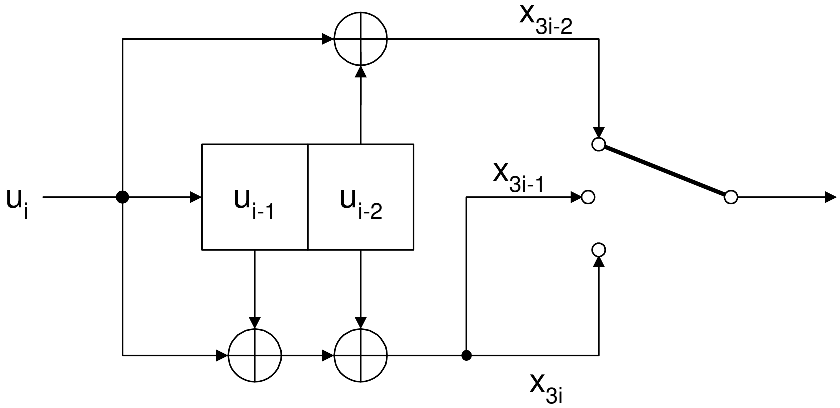
a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.

b) Berechnen Sie die Ausgangssequenz des Encoders für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 1 1 1 1 1 ...), falls der Encoder im Zustand (u_{-1} u_{-2}) = (0 0) startet.

c) Weshalb ist dieser Faltungscode unbrauchbar?

Aufgabe 14

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode der Rate 1/3.



a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.

b) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Encoders. Nehmen Sie dazu an, dass alle Schieberegisterinhalte zu Beginn auf Null gesetzt werden.

c) Welche Folge von Codebits x[.] gibt der Encoder für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 0 1 1 0) aus?

d) Was ist die minimale Hamming-Distanz zwischen der Codesequenz (000 000 000 ...) und einer beliebigen anderen Codesequenz?

e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus die Nachrichtensequenz der Länge 4, welche am besten zur empfangenen Sequenz r[.] = (101 100 110 111) passt. Wie viele Bitfehler wurden in diesem Fall bei der Übertragung gemacht?

Aufgabe 15

Ein Hamming-Code der Länge n = 7 soll zur reinen Fehlererkennung eingesetzt werden. Er enthält 16 Codeworte mit folgenden Hamming-Gewichten.

Gewicht	Anzahl Codeworte
0	1
3	7
4	7
7	1

Die einzelnen Bits werden über einen symmetrischen Binärkanal mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P_b = 10^{-2}$ übertragen.

a) Wie gross ist die minimale Hamming-Distanz d_{min} des Codes?

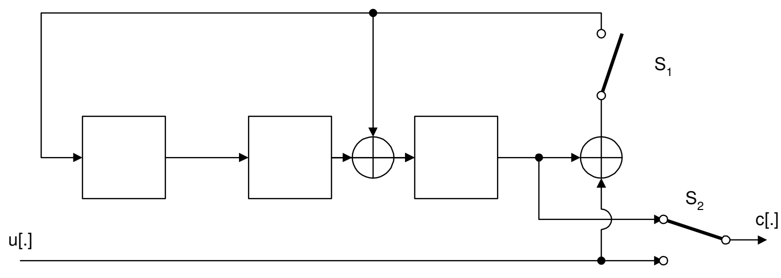
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort bei der Übertragung verfälscht wird?

c) Berechnen Sie die *exakte* Wahrscheinlichkeit, dass ein Übertragungsfehler beim Senden des Codewortes (0 0 0 0 0 0 0) nicht erkannt wird.

d) Geben Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit an, falls Codeworte mit Hamming-Gewicht i im Code genau w_i mal vorkommen.

Aufgabe 16

Gegeben ist ein systematischer Encoder für einen zyklischen Code mit der Blocklänge N = 7.



Schalter	Takt 1 bis 4	Takt 5 bis 7
S_1	geschlossen	offen
S_2	unten	oben

a) Bestimmen Sie das Generatorpolynom g(x) des Codes.

b) Aus wie vielen Nachrichten- und Prüfbits setzt sich ein Codewort zusammen?

c) Geben Sie die systematische Generatormatrix des Codes an.

d) Was ist die minimale Hamming-Distanz des Codes?

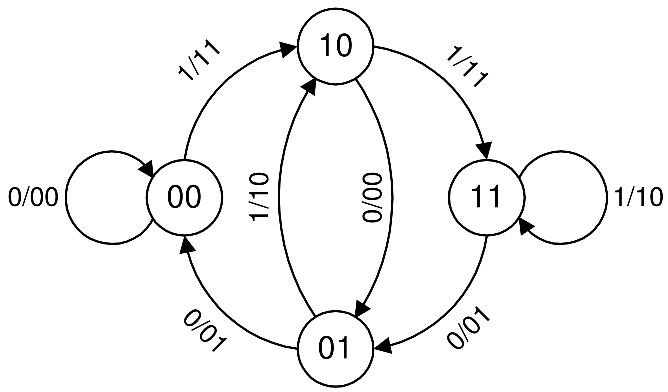
e) Wie viele Fehler kann der Code mindestens erkennen/korrigieren?

f) Wir nehmen an, dass der Code nur die unter e) erhaltene minimale Anzahl Fehler korrigieren kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein empfangenes Codewort nicht mehr korrigiert werden kann, wenn einzelne Bits mit der Wahrscheinlichkeit $P_b = 0.01$ falsch übertragen werden.

g) Berechnen Sie den Syndromvektor für die empfangenen Binärworte $\mathbf{r}_1 = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$ und $\mathbf{r}_2 = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$.

Aufgabe 17

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Encoders für einen Faltungscode der Rate 1/2. Die Zustandsübergänge sind wie folgt beschriftet: $u_i/x_{2i-1}, x_{2i}$, wobei u_i das aktuelle Eingangsbit und x_{2i-1} und x_{2i} die entsprechenden Ausgangsbits bezeichnen.



a) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Codes. Nehmen Sie dazu an, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand „00“ versetzt wird.

b) Welche Folge von Codebits x[.] gibt der Encoder für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 1 0 1 0 0) aus?

c) Was ist die minimale Hamming-Distanz zwischen der Codesequenz (00 00 00 ...) und einer beliebigen anderen Codesequenz?

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus die Nachrichtensequenz der Länge 6, welche am besten zur empfangenen Sequenz r[.] = (01 00 01 10 00 01) passt. (Wiederum wird angenommen, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand „00“ versetzt wurde). Wie viele Bitfehler wurden in diesem Fall bei der Übertragung gemacht?

e) Skizzieren die Encoderschaltung, die zum gegebenen Zustandsdiagramm passt.

Aufgabe 18

Die so genannte Slepian'sche Standardmatrix eines binären (n,k)-Codes C hat die Dimension $2^{n-k} \times 2^k$ und wird wie folgt gebildet:

1. Die erste Zeile der Matrix besteht aus allen Codeworten $\mathbf{v}_i$ des Codes, wobei an erster Stelle dass Codewort $\mathbf{0}$ eingetragen wird.
2. Aus der Menge aller Vektoren, die nicht in der ersten Zeile enthalten sind, wird anschliessend ein Vektor $\mathbf{a}_1$ mit minimalem Hamming-Gewicht gewählt. In der zweiten Zeile der Matrix wird der Vektor $\mathbf{a}_1$ unter das Codewort $\mathbf{0}$ eingetragen. Die restlichen Einträge der zweiten Zeile ergeben sich aus der Addition des Codeworts $\mathbf{v}_i$ aus der ersten Zeile mit dem Vektor $\mathbf{a}_1$.
3. Aus der Menge aller Vektoren, die nicht in der ersten oder zweiten Zeile enthalten sind wird nun ein Vektor $\mathbf{a}_2$ mit minimalem Hamming-Gewicht gewählt. Die dritte Zeile enthält alle Vektoren $\mathbf{v}_i \oplus \mathbf{a}_2$ mit $\mathbf{v}_i \in$ C.
4. Auf diese Art wird fortgefahren, bis die Matrix alle 2^n binären Vektoren enthält.

Die Menge der Vektoren in einer Zeile der Matrix wird als Nebenklasse (engl. coset) des Codes bezeichnet. In der ersten Spalte der Matrix befinden sich die entsprechenden Klassenanführer (engl. coset leaders).

Coset Leaders

Codewörter	$\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	…
	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{a}_1$	$\mathbf{v}_3 \oplus \mathbf{a}_1$	…
	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{a}_2$	$\mathbf{v}_3 \oplus \mathbf{a}_2$	…
	…	…	…	…

Gegeben ist ein binärer Blockcode mit der Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine systematische Generatormatrix $\mathbf{G'}$ für diesen Code.

b) Stellen Sie für den Code die Slepian'sche Standardmatrix auf.
Tipp: Die Komponenten der Matrix sind Vektoren.

c) Der binäre Vektor (0 1 1 1) wird empfangen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Standardmatrix dasjenige Codewort, welches mit grösster Wahrscheinlichkeit gesendet wurde. Wie lautet in diesem Fall der Fehlervektor?
Tipp: Die Standardmatrix enthält alle möglichen binären Vektoren der Länge n. Jeder Eintrag ist die Summe aus einem gültigen Codewort und einem Klassenanführer. Die Klassenanführer haben gemäss Konstruktionsregel minimales Hamming-Gewicht.

d) Können mit dem gegebenen Code alle Fehlermuster mit Hamming-Gewicht 1 korrigiert werden? (Begründung!)

e) Ein einzelnes Bit eines Codewortes wird mit der Wahrscheinlichkeit p = 0.01 falsch übertragen. Berechnen Sie für den gegebenen Code die exakte Wahrscheinlichkeit P_{corr}, dass ein empfangener Vektor korrekt decodiert wird.

f) Es sei α_i (i = 0, 1, …, n) die Anzahl „coset leaders" eines Codes mit dem Hamming-Gewicht i. Geben Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P_{corr} an, dass ein empfangener Vektore korrekt decodiert wird.

Aufgabe 19

Cyclic-Redundancy-Check- (CRC-) Codes sind zyklische Codes mit speziell guten Fehlererkennungseigenschaften. Ihr Generatorpolynom ist von der Form

$$g(X) = (1 \oplus X) \cdot p(X),$$

wobei p(X) ein so genannt primitives Polynom vom Grad m – 1 ist, welches $X^n \oplus 1$ ohne Rest teilt (m = Anzahl Prüfbits, n = Anzahl Codebits).

a) Welches Generatorpolynom ergibt sich für einen (7,3)-Code mit $p(X) = X^3 \oplus X \oplus 1$?

b) Skizzieren Sie die Encoder-Schaltung in systematischer Form.

c) Codieren Sie die Nachricht **u** = (1 1 1) in systematischer Form.

d) Welches Syndrom **s** resultiert für ein beliebiges Codewort, falls der Fehlervektor gleich **e** = (1 0 0 0 0 0 0) ist?

e) Geben Sie sämtliche Codeworte des Codes in Tabellenform an.
(**Tipp:** Nachdenken, nicht rechnen!).

f) Wie viele Bitfehler kann der Code sicher *erkennen*?

g) Geben Sie die systematische Generatormatrix des Codes an.

h) Kann mit dem gegebenen Polynom p(X) auch ein (8,4)-Code definiert werden? Falls ja, wie? Falls nein, weshalb nicht?

Aufgabe 20

Gegeben ist folgender Code

$$C = \{(0000), (1011), (1110), (1101)\}$$

a) Geben Sie die Anzahl Prüfbits m und die Anzahl Nachrichtenbits k an.

b) Handelt es sich um einen linearen Code? (Begründung!)

c) Wie viele Fehler können mit diesem Code sicher erkannt werden?

Aufgabe 21

Ein zyklischer Code mit n = 7 und k = 3 besitzt das Generatorpolynom

$$\mathbf{g}(X) = X^4 \oplus X^2 \oplus X \oplus 1$$

a) Prüfen Sie nach, ob die Binärwörter

$$\mathbf{r}_1 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\mathbf{r}_2 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

gültige Codewörter sind.

b) Skizzieren Sie für das gegebene Generatorpolynom eine Schaltung zur Erzeugung von systematischen Codeworten.

c) Geben Sie die systematische Generatormatrix des Codes an.

d) Was ist die minimale Hamming-Distanz des Codes?

e) Wie viele Fehler können mit diesem Code mindestens *korrigiert* werden?

f) Berechnen Sie die *exakte* Wahrscheinlichkeit, dass ein Übertragungsfehler beim Senden des Codewortes (0 0 0 0 0 0 0) nicht mehr *erkannt* werden kann, wenn einzelne Bits mit der Wahrscheinlichkeit P_b = 0.02 falsch übertragen werden.

g) Berechnen Sie den Syndromvektor für das empfangenen Binärworte $\mathbf{r}$ = (1 1 0 0 1 1 1).

Aufgabe 22

Gegeben ist die nachfolgende Syndromtabelle eines linearen Blockcodes, der einzelne Bitfehler korrigieren kann:

Fehlermuster $\mathbf{e}$	Syndromvektor $\mathbf{s}$
(1 0 0 0 0 0 0 0)	(1 0 1 0 0)
(0 1 0 0 0 0 0 0)	(0 1 0 1 0)
(0 0 1 0 0 0 0 0)	(0 0 1 0 1)
(0 0 0 1 0 0 0 0)	(1 0 0 0 0)
(0 0 0 0 1 0 0 0)	(0 1 0 0 0)
(0 0 0 0 0 1 0 0)	(0 0 1 0 0)
(0 0 0 0 0 0 1 0)	(0 0 0 1 0)
(0 0 0 0 0 0 0 1)	(0 0 0 0 1)

a) Geben Sie die Anzahl Prüfstellen n – k und die Anzahl Nachrichtenstellen k des Codes an.

b) Bestimmen Sie die Prüfmatrix $\mathbf{H}$ und die Generatormatrix $\mathbf{G}$ des Codes.

Tipp: Bezeichnen Sie die Zeilen von $\mathbf{H}^T$ mit $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, usw.

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{h}_1- \\ -\mathbf{h}_2- \\ \vdots \\ -\mathbf{h}_n- \end{bmatrix}.$$

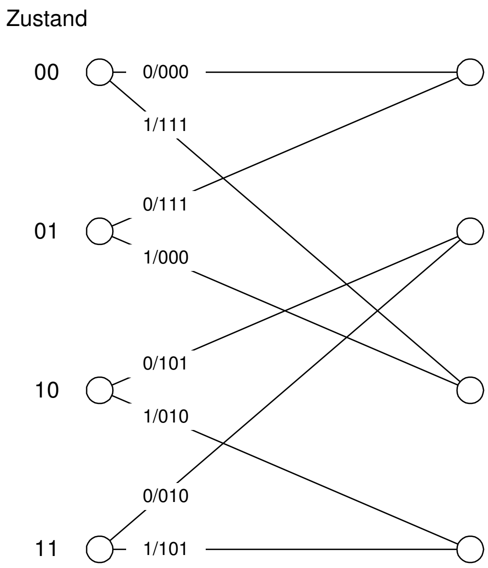
c) Es wurde $\mathbf{r}_1$ = (1 0 0 1 0 0 0 1) empfangen. Wurde das gesendete Codewort verfälscht? Lässt sich das gesendete Codewort ermitteln? Falls ja, geben Sie das gesendete Codewort an.

d) Es wurde $\mathbf{r}_2$ = (1 0 1 1 0 1 1 1) empfangen. Wurde das gesendete Codewort verfälscht? Lässt sich das gesendete Codewort ermitteln? Falls ja, geben Sie das gesendete Codewort an.

e) Überprüfen Sie, ob dieser lineare Blockcode zyklisch ist.

Aufgabe 23

Gegeben ist ein Ausschnitt aus einem Trellisdiagramm für einen Faltungscode mit der Rate R = 1/3. Die Zustandsübergänge sind jeweils mit dem aktuellen Eingangsbit u[i] und den drei Ausgangsbits beschriftet.



a) Welche Folge von Codebits v[.] gibt der Encoder für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 0 1 1 0 0) aus? Nehmen Sie dazu an, dass der Encoder im Zustand (0 0) startet.

b) Was ist die minimale Hamming-Distanz zwischen der Codesequenz (000 000 000 ...) und einer beliebigen anderen Codesequenz?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus die Nachrichtensequenz der Länge 6, welche am besten zur empfangenen Sequenz r[.] = (010 111 111 010 111 001) passt. (Wiederum wird angenommen, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand (0 0) versetzt wurde). Wie viele Bitfehler wurden in diesem Fall bei der Übertragung gemacht?

d) Skizzieren Sie eine Encoderschaltung, die den gegebenen Code erzeugt.

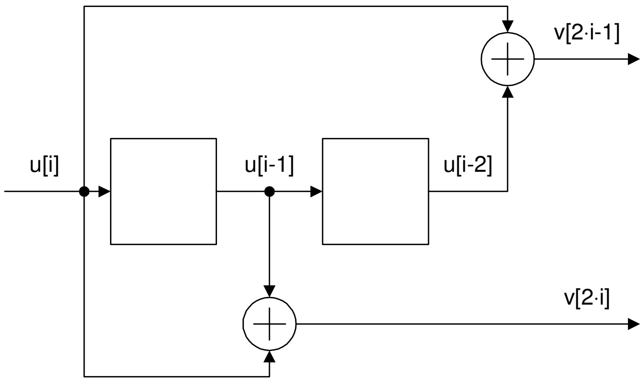
Mit dem gegebenen Faltungscode sollen Blöcke von jeweils zwei Nachrichtenbits u[1] und u[2] übertragen werden. Nach jedem Block wird der Encoder mit zwei weiteren Eingangsbit u[3] = u[4] = 0 wieder in den Zustand (0 0) zurückgeführt, wobei der Encoder zusätzliche sechs Bits ausgibt. Es entsteht so ein (12,2)-Blockcode.

e) Geben Sie den (12,2)-Blockcode in Form einer Tabelle an.

f) Wie viele Bitfehler können mit diesem Blockcode mindestens korrigiert werden?

Aufgabe 24

Gegeben ist eine Encoderschaltung für einen Faltungscode der Rate R = ½.



a) Skizzieren Sie das Zustandsdiagramm des Codes. Bezeichnen Sie die Übergangspfeile mit dem jeweiligen Eingangsbit und den Ausgangsbits.

b) Welche Besonderheit weist dieses Zustandsdiagramm beim Übergang vom Zustand (1 1) in den Zustand (1 1) auf und welche (unerwünschte) Eigenschaft resultiert daraus für den Faltungscode?

Aufgabe 25

Wir betrachten den endlichen Körper $GF(2^3)$, welcher durch das primitive Polynom $p(X) = X^3 + X^2 + 1$ definiert wird.

Der Körper enthält acht Elemente, die auf unterschiedliche Art dargestellt werden können.

i) Ergänzen Sie die nachfolgende Tabelle. Mit α bezeichnen wir das primitive Element des Körpers, welches eine Nullstelle des Polynoms p(X) ist. Es gilt also $p(\alpha) = \alpha^3 + \alpha^2 + 1 = 0$ und folglich $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$.

Potenzdarstellung	Polynomdarstellung	Binäre Darstellung	Ganzzahldarstellung
	0	0 0 0	0
α^0	1	0 0 1	1
α^1	α	0 1 0	2
α^2	α^2	1 0 0	4
α^3	$\alpha^2 + 1$	1 0 1	5
α^4			
α^5			
α^6			

Die Potenzdarstellung eignet sich vor allem für die Multiplikation von Elementen. Die Polynom- resp. die binäre Darstellung sind für die Addition zweckmässig. Die Ganzzahldarstellung ist sehr kompakt und wird beispielsweise von MATLAB zur Bezeichnung der Elemente verwendet.

j) Berechnen Sie α^7.

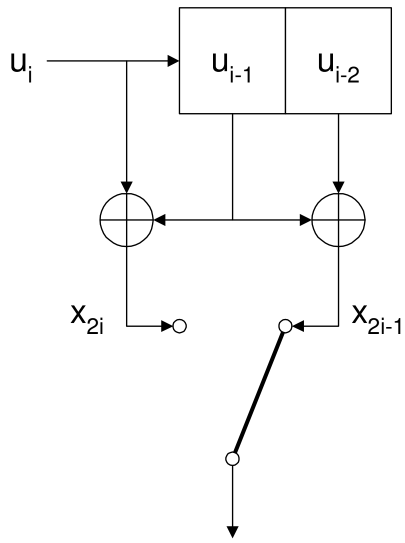
k) Stellen Sie für diesen Körper die Addition- und die Multiplikationstabellen auf. Verwenden Sie dazu die Ganzzahldarstellung.

l) Berechnen Sie in diesem Körper 5^{-1}, 3^3, $\sqrt{7}$ und $\log_\alpha(4)$.

m) Berechnen Sie in diesem Körper die diskrete Fouriertransformation **V** der Sequenz **v**=[1 0 0 0 0 0 0].

n) Kontrollieren Sie, dass die inverse Fouriertransformation von **V** das Resultat $v_1 = 1$ ergibt.

Aufgabe 26



Gegeben sei ein Encoder für einen Faltungscode der Rate R = 1/2.

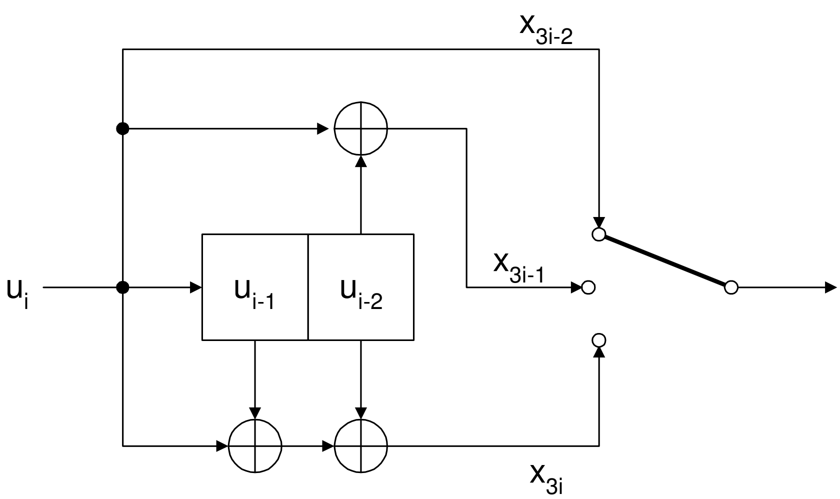
a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Trellis auf.

b) Welche Codeziffern werden vom Encoder erzeugt, wenn die Symbolfolge (u_i) = 0, 0, 0, 0, … codiert wird? Annahme: Der Coder befindet sich zu Beginn im Zustand (u_{i-1} = 0, u_{i-2} = 0).

c) Bedingt durch zwei Übertragungsfehler werden die Codeziffern ($x_{2i-1}x_{2i}$) = 00, 01, 10, 00, 00, 00, … anstelle der eigentlich gesendeten Sequenz 00, 00, 00, 00, 00, … empfangen. Wieviel Fehler macht der Decoder? Eignet sich dieser Faltungscode zur Fehlerkorrektur?

Aufgabe 27

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode der Rate R = 1/3.

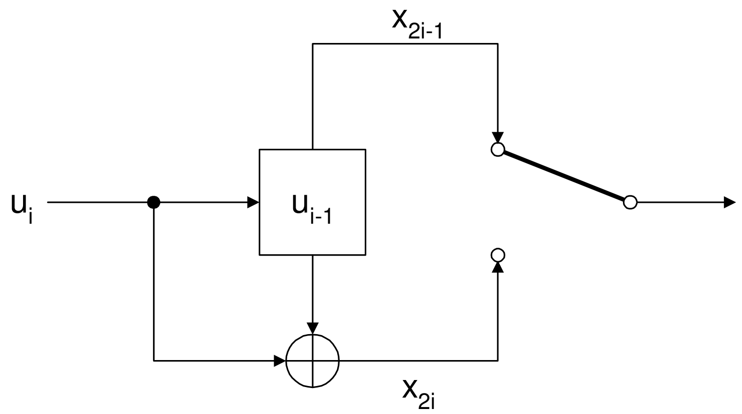


a) Zeichnen Sie die Zustandsübergänge des Faltungsencoders. Tragen Sie auf die Pfade jeweils das aktuell zu übertragende Bit u_i sowie die drei Codebits x_{3i-2}, x_{3i-1} und x_{3i} ein.

b) Die binäre Sequenz $u_i = (1, 1, 0, 0)$ wird übertragen. Geben Sie die Ausgangssequenz des Encoders an, wenn die Schieberegister zu Beginn auf Null gesetzt werden.

Aufgabe 28

Gegeben ist ein Coder für einen Faltungscode der Rate R = ½. Mit diesem Faltungscode sollen Gruppen von jeweils vier Bits gesendet werden, wobei das vierte Bit immer gleich 0 sein soll. Zu Beginn jeder Vierergruppe wird das Schieberegister gelöscht.



a) Geben Sie die entsprechende Codetabelle an.

(u_1, u_2, u_3, u_4)	Codewort
0000	
0010	
0100	
0110	
1000	
1010	
1100	
1110	

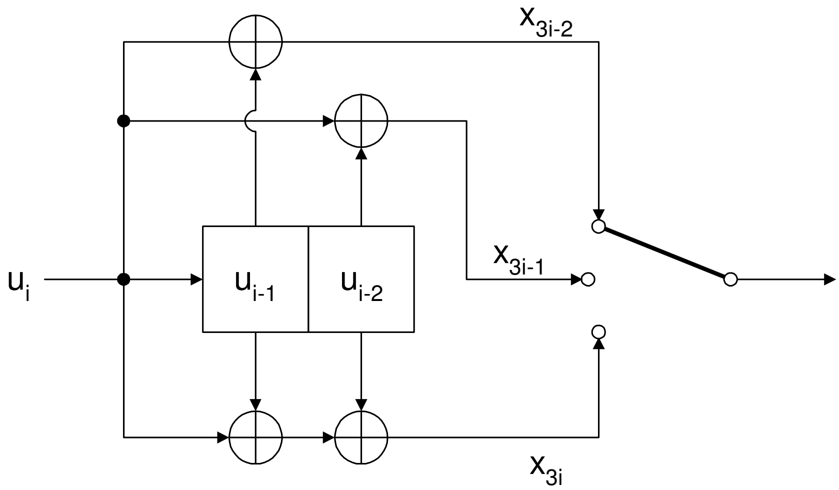
b) Zeichnen Sie das dazugehörige Trellisdiagramm. Tragen Sie auf die Pfade jeweils das aktuell zu übertragende Bit u_i sowie die beiden Codebits x_{2i-1} und x_{2i} ein.

c) Die binäre Sequenz 01 01 11 00 wird empfangen. Welche Nachricht wurde mit grösster Wahrscheinlichkeit gesendet?

Tipp: Vielleicht lösen Sie mit Vorteil zuerst die Teilaufgabe b).

Aufgabe 29

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode der Rate R = 1/3. Mit diesem Faltungscode sollen Gruppen von jeweils vier Bits gesendet werden, **wobei das dritte und vierte Bit immer gleich 0 sein soll**. Zu Beginn jeder Vierergruppe wird das Schieberegister gelöscht.



a) Zeichnen Sie das dazugehörige Trellisdiagramm. Tragen Sie auf die Pfade jeweils das aktuell zu übertragende Bit u_i sowie die drei Codebits x_{3i-2}, x_{3i-1} und x_{3i} ein (Format: $u_i/x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}$).

b) Geben Sie die entsprechende Codetabelle an.

(u_1, u_2, u_3, u_4)	Codewort
0000	
0100	
1000	
1100	

c) Die binäre Sequenz (111 000 001 000) wird empfangen. Welche Nachricht wurde mit grösster Wahrscheinlichkeit gesendet?

d) Wie viele Übertragungsfehler können mit diesem Verfahren sicher korrigiert werden?

Aufgabe 30

Von einem linearen, zyklischen Code sind die beiden folgenden Codewörter bekannt:

$$\mathbf{c}_1 = (1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0)$$
$$\mathbf{c}_2 = (1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0)$$

a) Geben Sie alle Codewörter des Codes an.

b) Wie lautet die systematische Generatormatrix des Codes?

c) Geben Sie das Generatorpolynom des Codes an.

Aufgabe 31

Wir betrachten den endlichen Körper GF(2^2), welcher durch das primitive Polynom
$p(X) = X^2 + X + 1$ definiert wird.

Der Körper enthält vier Elemente, die auf unterschiedliche Art dargestellt werden können.

a) Ergänzen Sie die nachfolgende Tabelle. Mit α bezeichnen wir das primitive Element des Körpers, welches eine Nullstelle des Polynoms p(X) ist. Es gilt also $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ und folglich $\alpha^2 = \alpha + 1$.

Potenzdarstellung	Polynomdarstellung	Binäre Darstellung	Ganzzahldarstellung
	0	0 0	0
α^0	1	0 1	1
α^1			
α^2			

Die Potenzdarstellung eignet sich vor allem für die Multiplikation von Elementen. Die Polynom- resp. die binäre Darstellung sind für die Addition zweckmässig. Die Ganzzahldarstellung ist sehr kompakt und wird beispielsweise von MATLAB zur Bezeichnung der Elemente verwendet.

b) Berechnen Sie α^3.

c) Stellen Sie für diesen Körper die Addition- und die Multiplikationstabelle auf. Verwenden Sie dazu die Ganzzahldarstellung.

d) Berechnen Sie in diesem Körper 3^{-1}, 2^3, $\sqrt{2}$ und $\log_\alpha(3)$.

e) Berechnen Sie in diesem Körper die diskrete Fouriertransformation **V** der Sequenz **v**=[1 1 1].

Aufgabe 32

Für einen systematischen, linearen (6,3)-Blockcode werden die drei Prüfbits wie folgt aus den Nachrichtenbits u_1, u_2 und u_3 bestimmt:

$$p_1 = 1 \cdot u_1 \oplus 1 \cdot u_2 \oplus 1 \cdot u_3$$

$$p_2 = 1 \cdot u_1 \oplus 1 \cdot u_2 \oplus 0 \cdot u_3$$

$$p_3 = 0 \cdot u_1 \oplus 1 \cdot u_2 \oplus 1 \cdot u_3$$

a) Geben Sie die systematische Generatormatrix für diesen Code an.

b) Konstruieren Sie alle möglichen Codewörter.

c) Wie viele Bitfehler können mit diesem Code sicher korrigiert werden?

d) Geben Sie die Prüfmatrix **H** des Codes an.

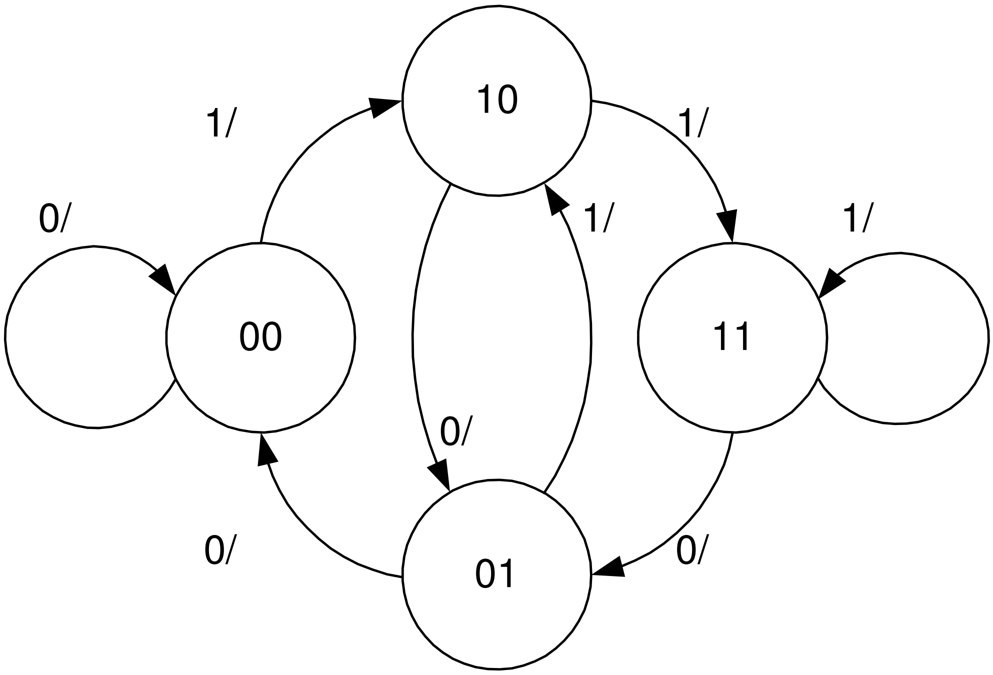
e) Berechnen Sie den Wert des Syndromvektors für das Fehlermuster **e** = [1 1 0 0 0 0].

f) Welches Bit würde der Decoder mit dem in e) berechneten Syndrom korrigieren?

Aufgabe 33

Ein Faltungsencoder mit vier Zuständen gibt mit der Eingangssequenz u[.] = (0 1 1 1 0 1 0 0) die Ausgangssequenz v[.] = (00 11 11 10 01 10 00 01) aus. Dabei nehmen wir an, dass im Zustand 00 gestartet wurde.

a) Vervollständigen Sie das nachfolgende Zustandsdiagramm des Encoders.



b) Die Sequenz r[.] = (10 00 10 01 01 01) wird empfangen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus den wahrscheinlichsten Pfad durch den Trellis, falls der Startzustand mit 00 angenommen wird.
Hinweis: Die maximale Punktzahl wird nur erteilt, falls für alle Knoten des Trellis die jeweils optimale Metrik angegeben wird.

c) Welche Bitsequenz gibt der Viterbi-Decoder aus?

Aufgabe 34

Gegeben ist die Generatormatrix **G** eines linearen, zyklischen Codes:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie alle Codewörter des Codes an.

b) Wie viele Fehler können mit diesem Code korrigiert werden?

c) Geben Sie das Generatorpolynom des Codes an.

d) Nach der Übertragung werden zwei Wörter $\mathbf{r}_1$ = (0101010) und $\mathbf{r}_2$ = (1110010) empfangen. Berechnen Sie für beide Wörter den jeweiligen Syndromvektor.

Aufgabe 35

Wir betrachten den endlichen Körper $GF(2^2)$, welcher durch das primitive Polynom $p(X) = X^2 + X + 1$ definiert wird. Mit α bezeichnen wir das primitive Element des Körpers, welches eine Nullstelle des Polynoms $p(X)$ ist. Es gilt also $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ und folglich $\alpha^2 = \alpha + 1$.

Sie können die folgenden Additions- und Multiplikationstabellen verwenden

Addition				
$\oplus$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	1	α	$1+\alpha$
1	1	0	$1+\alpha$	α
α	α	$1+\alpha$	0	1
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	0

Multiplikation				
$\otimes$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$
α	0	α	$1+\alpha$	1
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	1	α

a) Geben Sie für jedes Element jeweils das inverse Element bezüglich Addition und bezüglich Multiplikation an.

x	0	1	α	$1+\alpha$
$-x$				
x^{-1}				

b) Geben Sie die Matrix **A** zur Berechnung der diskreten Fouriertransformation **V** eines Vektors **v** an. Es muss also gelten:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Die Matrix **A** soll nur die Elemente 0, 1, α und $1 + \alpha$ enthalten.

c) Geben Sie die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ zur Berechnung der inversen diskreten Fouriertransformation an. Es muss also gelten:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ soll nur die Elemente 0, 1, α und $1 + \alpha$ enthalten.

d) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation des Vektors $(1 \;\; \alpha \;\; 1+\alpha)$.

In diesem Körper soll ein Reed-Solomon Code entworfen werden, der $t = 1$ Symbolfehler korrigieren kann.

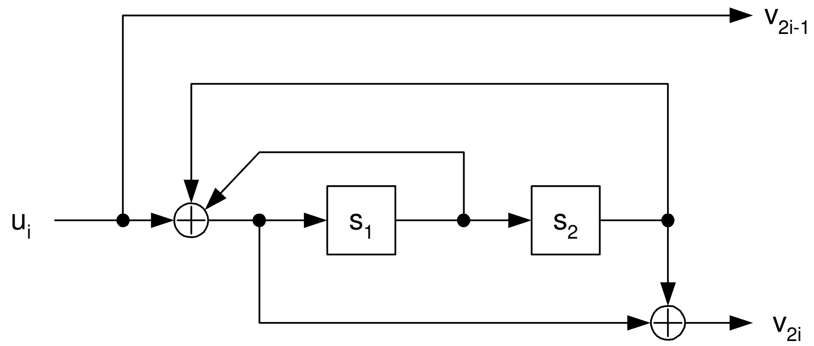
e) Aus wie vielen Symbolen besteht ein Codewort?

f) Aus wie vielen Codeworten besteht der Code?

g) Erstellen Sie eine Liste aller Codeworte.

Aufgabe 36

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode mit der Rate R = ½.



a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders. Beschriften Sie die Zustände mit (s_1 s_2) und die Zustandsübergänge mit u_i/v_{2i-1} v_{2i}, wobei u_i das aktuelle Eingangsbit und v_{2i-1} und v_{2i} die entsprechenden Ausgangsbits sind.
Tipp: Wahrscheinlich arbeiten Sie dazu am bestem mit Bleistift und Radiergummi.

b) Welche Folge von Codebits v[.] gibt der Encoder für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 1 1 1 0) aus?

c) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Codes. Nehmen Sie dazu an, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand (0 0) versetzt wird.

d) Was ist die minimale Hamming-Distanz zwischen der Codesequenz (00 00 00 ...) und einer beliebigen anderen Codesequenz?

e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus die Nachrichtensequenz der Länge 6, welche am besten zur empfangenen Sequenz r[.] = (10 01 10 11 00 10) passt. (Wiederum wird angenommen, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand (0 0) versetzt wurde). Wie viele Bitfehler wurden in diesem Fall bei der Übertragung gemacht?
Bemerkung: Verlangt ist die Metrik in jedem Knoten des Trellis!

Aufgabe 37

Von einem linearen, zyklischen Code sind die beiden folgenden Codewörter bekannt:

$$\mathbf{c}_1 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$
$$\mathbf{c}_2 = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

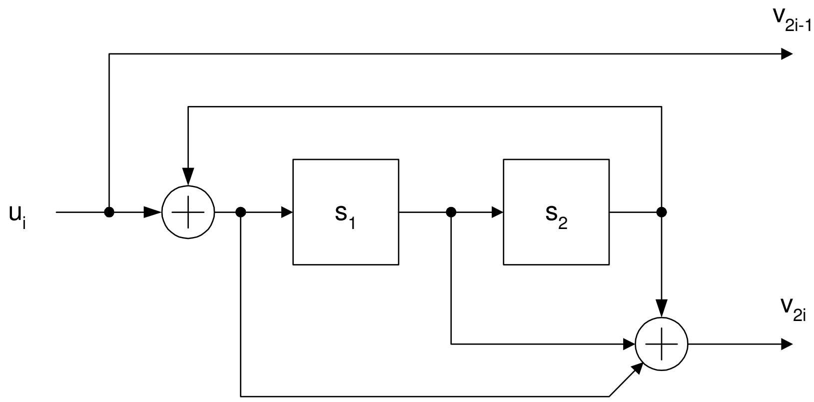
a) Geben Sie alle Codewörter des Codes an.

b) Wie lautet die systematische Generatormatrix des Codes?

c) Geben Sie das Generatorpolynom des Codes an.

Aufgabe 38

Gegeben ist ein Encoder für einen Faltungscode mit der Rate R = ½.



a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders. Beschriften Sie die Zustände mit (s_1 s_2) und die Zustandsübergänge mit u_i/v_{2i-1} v_{2i}, wobei u_i das aktuelle Eingangsbit und v_{2i-1} und v_{2i} die entsprechenden Ausgangsbits sind.
Tipp: Wahrscheinlich arbeiten Sie dazu am bestem mit Bleistift und Radiergummi.

b) Welche Folge von Codebits v[.] gibt der Encoder für die Nachrichtensequenz u[.] = (1 1 1 1 0) aus?

c) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Codes. Nehmen Sie dazu an, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand (0 0) versetzt wird.

d) Was ist die minimale Hamming-Distanz zwischen der Codesequenz (00 00 00 ...) und einer beliebigen anderen Codesequenz?

e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus die Nachrichtensequenz der Länge 6, welche am besten zur empfangenen Sequenz r[.] = (01 01 00 11 10 11) passt. (Wiederum wird angenommen, dass der Encoder zu Beginn in den Zustand (0 0) versetzt wurde). Wie viele Bitfehler wurden in diesem Fall bei der Übertragung gemacht?