AUFGABEN STOCHASTISCHE SIGNALE

Aufgabe 1

Ein stationäres Zufallssignal X(t) besitzt den Gleichanteil m_X. Der Wechselanteil des Signals ist somit gegeben durch $X_{AC}(t) = X(t) - m_X$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt

$$E\left[(X(t)-m_X)^2\right] = E\left[X^2(t)\right] - m_X^2$$

Aufgabe 2

Ein Zufallssignal X(t) setzt sich wie folgt zusammen

$$X(t) = Y \cdot \cos(\omega \cdot t) + Z \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Y und Z sind zwei mittelwertfreie, voneinander unabhängige Zufallsgrössen mit

$$E\left[Y^2\right] = E\left[Z^2\right] = \sigma^2$$

a) Berechnen Sie den linearen Scharmittelwert $E[X(t)]$.

b) Berechnen Sie den quadratischen Scharmittelwert $E\left[X^2(t)\right]$.

c) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$ und zeigen Sie, dass diese nur von der Differenz $\tau = t_1 - t_2$ abhängt.

d) Ist das Signal X(t) schwach stationär?

e) Ist das Zufallssignal X(t) ergodisch?

Tipps: Wenden Sie das Superpositionsprinzip an.
Da Y und Z mittelwertfrei und voneinander unabhängig sind, gilt $E[Y \cdot Z] = 0$.

Aufgabe 3

Ein Zufallssignal X(t) wird durch das Werfen einer fairen Münze wie folgt bestimmt

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{Zahl} \\ 2 & \text{Kopf} \end{cases}$$

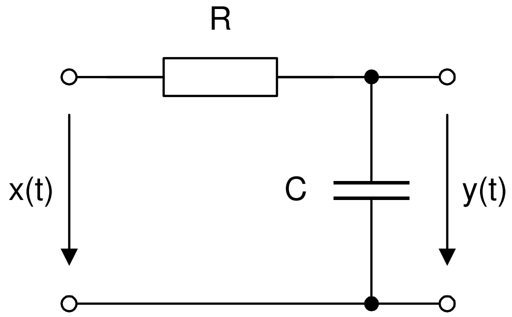
a) Bestimmen Sie die Scharmittelwerte $E[X(t)]$, $E\left[X^2(t)\right]$, $E\left[X^3(t)\right]$ sowie $E[X(0) \cdot X(t)]$.

b) Ist der Prozess stationär?

c) Ist der Prozess ergodisch?

Aufgabe 4

Gegeben ist ein einfacher RC-Tiefpass mit $\tau = R \cdot C$.



a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ des Systems an.

An den Eingang wird weisses Rauschen mit der spektralen Leistungsdichte $S_{XX}(f) = \eta/2$ gegeben.

b) Berechnen Sie die spektrale Leistungsdichte des Ausgangssignals.

c) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(\tau)$ des Ausgangssignals.

d) Berechnen Sie die Leistung des Ausgangssignals.

e) Welche Bandbreite müsste ein idealer Tiefpass aufweisen um bei gleichem Eingangssignal ein Ausgangssignal mit gleicher Leistung zu erzeugen?

Aufgabe 5

Wir betrachten ein Zufallssignal mit der spektralen Leistungsdichte

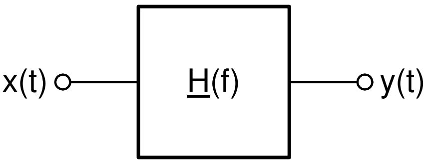
$$\underline{S}_{XX}(f) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos(f \cdot \pi \cdot T)}{2} = \left[\cos\left(\dfrac{f \cdot \pi \cdot T}{2}\right)\right]^2 & |f| < \dfrac{1}{T} \\ 0 & |f| \geq \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf von $\underline{S}_{XX}(f)$.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(\tau)$ des Rauschens.

c) An welchen Stellen weist $R_{XX}(\tau)$ Nullstellen auf?

Aufgabe 6



Gegeben ist ein Filter mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(f) = \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{f}{f_0}\right)}{\pi \cdot \frac{f}{f_0}}$$

An den Eingang wird weisses Rauschen mit der spektralen Leistungsdichte $S_{XX}(f) = \eta/2$ gegeben.

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Impulsantwort h(t) des Filters.

b) Geben Sie einen Ausdruck für die spektrale Leistungsdichte $S_{YY}(f)$ des Ausgangssignals an.

c) Skizzieren Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{XY}(\tau)$ zwischen Eingang- und Ausgangssignal.

d) Skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(\tau)$ des Ausgangssignals.

Tipp: Da $\underline{H}(f)$ rein reell ist, gilt $\left|\underline{H}(f)\right|^2 = \underline{H}(f) \cdot \underline{H}(f) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; h(t) * h(t)$

e) Bestimmen Sie die Leistung des Ausgangssignals.

f) Welche Bandbreite müsste ein idealer Tiefpass aufweisen um bei gleichem Eingangssignal ein Ausgangssignal mit gleicher Leistung zu erzeugen?

Aufgabe 7

Gegeben ist ein Zufallsprozess X(t) von der Form

$$X(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \Phi).$$

Die Zufallsvariable Φ kann jeden Wert im Intervall 0 .. 2π mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Beachten Sie, dass f_0 eine bekannte Konstante ist.

a) Berechnen Sie den linearen Mittelwert E[X(t)].

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$.

c) Ist der Prozess X(t) schwach stationär?

Ein zweiter Zufallsprozess Y(t) ist stationär und besitzt die bekannte Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(\tau)$. Die Prozesse X(t) und Y(t) sind unabhängig.

Wir betrachten das Produkt

$$Z(t) = X(t)\cdot Y(t).$$

d) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)]$ des Produktprozesses.

e) Ist der Prozess Z(t) schwach stationär?

Gegeben sei nun das Leistungsdichtespektrum $S_{YY}(f)$ des Prozesses Y(t):

$$S_{YY}(f) = \frac{1}{1+\left(2\cdot\pi\cdot\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

f) Berechnen und skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{ZZ}(f)$ des Prozesses Z(t).

Tipps:

Da X(t) und Y(t) unabhängig sind, gilt:

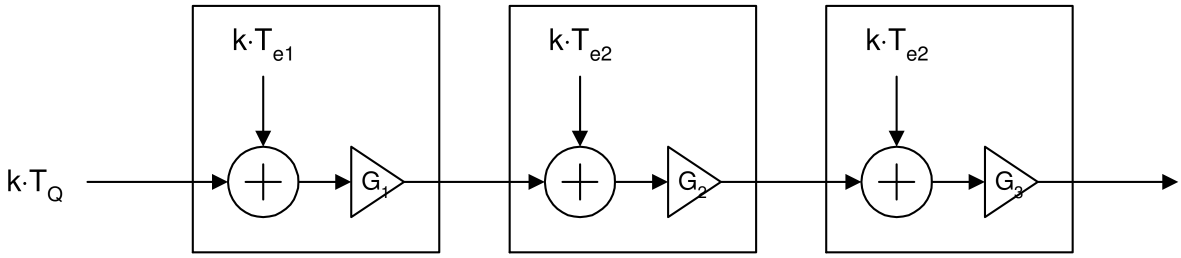
$$E[X(t_1)\cdot Y(t_1)\cdot X(t_2)\cdot Y(t_2)] = E[X(t_1)\cdot X(t_2)]\cdot E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$$

Additionstheoreme und Produkte von trigonometrischen Termen:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

Aufgabe 8

Wir betrachten eine Kettenschaltung von rauschenden Zweitoren. Das Rauschen eines Zweitors wird durch eine äquivalente Rauschtemperatur T_e beschrieben. Die Leistungsverstärkungen der einzelnen Zweitore sind mit G_1, G_2 und G_3 gegeben.



a) Wie gross ist die Nutzsignalleistung am Ausgang, wenn am Eingang ein Nutzsignal mit der Leistung P_S anliegt?

b) Wie gross ist die Rauschleistung am Ausgang, wenn die Quelle am Eingang mit der Temperatur T_Q rauscht und die Rauschbandbreite B beträgt?

c) Berechnen Sie das Signal-zu-Rauschverhältnis am Eingang und am Ausgang.

d) Wie gross ist die Rauschzahl des gesamten Systems?

e) Versuchen Sie, die Rauschzahl des gesamten Systems durch die Rauschzahlen der einzelnen Zweitore auszudrücken.

Tipp:

Zusammenhang zwischen Rauschzahl und äquivalenter Rauschtemperatur:

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0}$$

T_0 ist die Bezugstemperatur, die in diesem Beispiel gleich der Quellentemperatur T_Q angenommen werden darf.

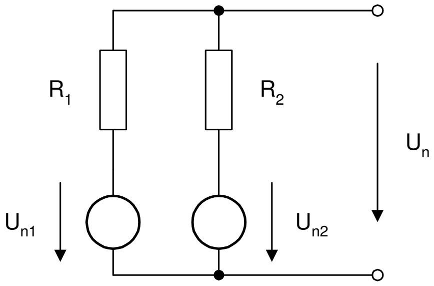
Aufgabe 9

Ein Empfänger weist eine Bandbreite von B = 10 kHz auf. Seine Rauschzahl beträgt F = 5 dB. Um eine genügenden Empfangsqualität sicherzustellen, muss das Signal-zu-Rauschverhältnis am Ausgang des Empfängers mindestens 20 dB betragen.

a) Welche Leistung muss das Eingangssignal minimal aufweisen, damit die erwähnten Bedingungen bei Zimmertemperatur (T = 290 °K) erfüllt sind?

Aufgabe 10

Gegeben ist das Rauschersatzschaltbild zweier parallel geschalteten Widerstände R_1 und R_2.



Beide Widerstände haben dieselbe Temperatur T und die Systembandbreite sei mit B gegeben.

a) Nehmen Sie vorerst an, der Widerstand R_2 rausche nicht ($U_{n2} = 0$). Berechnen Sie den Effektivwert der Rauschspannung $U_{n|U_{n2}=0}$ an den Klemmen des Zweipols.

b) Nehmen Sie nun an, der Widerstand R_1 rausche nicht ($U_{n1} = 0$). Berechnen Sie den Effektivwert der Rauschspannung $U_{n|U_{n1}=0}$ an den Klemmen des Zweipols.

c) Welchen Effektivwert weist die Rauschspannung U_n an den Klemmen des Zweipols auf, wenn beide Widerstände rauschen?

Tipp: Da das Rauschen in den beiden Widerständen unkorreliert ist, gilt

$$U_n^2 = \left(U_{n|U_{n1}=0}\right)^2 + \left(U_{n|U_{n2}=0}\right)^2$$

d) Berechnen Sie den Wert eines einzelnen Widerstands, der an seinen Klemmen eine Rauschspannung mit gleichem Effektivwert aufweisen würde.

Aufgabe 11

Die Übertragungsfunktion eines Bandpassfilters ist durch

$$\underline{H}(f) = \frac{j \cdot \frac{f}{f_0}}{1 + j \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

gegeben. Dabei bezeichnet f_0 die Mittenfrequenz des Filters.

Tipp: Lassen Sie in den Ergebnissen den Bruch f/f_0 stehen. Verwenden Sie wo nötig die Substitution $F = f/f_0$.

An den Eingang des Filters wird weisses, Gaussverteiltes Rauschen mit der Rauschleistungsdichte $S_{nn}(f) = \eta/2$ gegeben.

a) Berechnen Sie die spektrale Leistungsdichte $S_{YY}(f)$ des Rauschens am Ausgang des Filters.

b) Welche Gesamtleistung weist das Rauschen am Ausgang des Filters auf?

c) Welche Bandbreite müsste ein idealer Bandpass aufweisen um bei gleichem Eingangssignal ein Ausgangssignal mit gleicher Leistung zu erzeugen?

d) Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(\tau)$ des Rauschens am Ausgang des Filters.

e) Da das Rauschen am Eingang Gaussverteilt ist, gilt dies auch für das Rauschen am Ausgang. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_Y(y)$ des Rauschens am Ausgang des Filters an.

Tipps:

$$\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\ln\left(\frac{1 - \sqrt{2} \cdot x + x^2}{1 + \sqrt{2} \cdot x + x^2} \right) + 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{2} \cdot x + 1\right) + 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{2} \cdot x - 1\right) \right]$$

$$S(f) = \frac{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^4} \quad \bullet\!\!-\!\!-\!\!\circ \quad s(t) = \pi \cdot f_0 \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot \pi \cdot f_0 \cdot |t|} \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot \pi \cdot f_0 \cdot |t| + \frac{\pi}{4} \right)$$

Aufgabe 12

Die Zufallsvariable Φ weist mit einer Wahrscheinlichkeit von ¼ einen der vier Werte φ, $\varphi + \pi/2$, $\varphi + \pi$ und $\varphi + 3\cdot\pi/2$ auf, wobei φ eine gegebene Konstante ist.

a) Berechnen Sie $E[\cos(\Phi)]$, $E[\cos^2(\Phi)]$ und $E[\cos(\Phi)\cdot\sin(\Phi)]$ ($= E[\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot\Phi)]$).

Gegeben ist ein Zufallsprozess X(t) von der Form

$$X(t) = \sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \Phi).$$

b) Berechnen Sie den linearen Mittelwert $E[X(t)]$.

c) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$.

Tipps: Aus Symmetriegründen gilt: $E[\sin(\Phi)] = E[\cos(\Phi)]$ und $E[\sin^2(\Phi)] = E[\cos^2(\Phi)]$.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Aufgabe 13

Berechnen Sie die Leistung des Ausgangssignals, wenn weisses Rauschen mit der spektralen Leistungsdichte

$$S_{nn}(f) = \frac{\eta}{2}$$

jeweils eines der folgenden Filter durchläuft.

a) Ein Filter mit der Impulsantwort

$$h_1(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & t \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Ein Filter mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}_2(f) = e^{-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

Tipps:

$$h_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \underline{H}_1(f) = \tau\cdot\frac{1}{1 + j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}$$

$$\int \frac{1}{1 + a^2\cdot x^2}dx = \frac{1}{a}\cdot\arctan(a\cdot x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$