

Inverse diskrete Fouriertransformation (IDFT)

Die inverse diskrete Fouriertransformation eines Vektors $\mathbf{Y} = [\underline{Y}_0 \quad \underline{Y}_1 \quad \dots \quad \underline{Y}_{N-1}]$ der Länge N ist wie folgt definiert:

$$\underline{y}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{Y}_k \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot n}{N}}.$$

Damit das Ergebnis reell ist, muss die Bedingung

$$\underline{Y}_{N-i} = \underline{Y}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

erfüllt sein.

OFDM-Signal

Wir betrachten ein OFDM-Signal mit K Kanälen, deren Mittenfrequenzen gemäss

$$f_k = \frac{k}{T_S}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

gewählt werden. Amplitude und Phase des Signals des k-ten Kanals hängen von der Information ab, die über diesen Kanal übertragen werden soll und werden durch den komplexen Zeiger $\underline{X}_k$ repräsentiert. Damit kann das entsprechende Signal wie folgt beschrieben werden:

$$s_k(t) = \operatorname{Re}[\underline{X}_k \cdot e^{j2\pi f_k \cdot t}] = \operatorname{Re}[\underline{X}_k] \cdot \cos(2\pi \cdot f_k \cdot t) - \operatorname{Im}[\underline{X}_k] \cdot \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t).$$

Für den zeitlichen Verlauf des OFDM-Signals erhält man

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re}[\underline{X}_k \cdot e^{j2\pi f_k \cdot t}].$$

Erzeugung eines OFDM-Signals mit Hilfe der inversen diskreten Fouriertransformation

Wir möchten im Folgenden zeigen, dass mit Hilfe der inversen diskreten Fouriertransformation aus den komplexen Zeigern $\underline{X}_k$ die Abtastwerte des OFDM-Signals $s(t)$ bestimmt werden können. Dazu wählen wir für die Länge der Fouriertransformation

$$N = 2 \cdot K + 2.$$

Ferner setzen wir

$$\underline{Y}_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \underline{X}_k & k = 1, 2, \dots, K \\ 0 & k = K+1 \\ \underline{X}_{2K+2-k}^* & k = K+2, K+3, \dots, 2 \cdot K + 1 \end{cases}$$

Die komplexen Zeiger $\underline{X}_k$ werden also gemäss der nachfolgenden Figur im Vektor $\mathbf{Y}$ abgelegt.

0	1	2	3			K	K+1	K+2			2K-1	2K	2K+1
0	$\underline{X}_1$	$\underline{X}_2$	$\underline{X}_3$			$\underline{X}_K$	0	$\underline{X}_K^*$			$\underline{X}_3^*$	$\underline{X}_2^*$	$\underline{X}_1^*$

Die Definition der inversen diskreten Fouriertransformation liefert

$$\begin{aligned}
 \underline{y}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} \underline{Y}_k \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{N}} \\
 &= \sum_{k=1}^K \underline{X}_k \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{2 \cdot K+2}} + \sum_{k=K+2}^{2 \cdot K+1} \underline{X}_{2 \cdot K+2-k}^* \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{2 \cdot K+2}} \\
 &\stackrel{m=2 \cdot K+2-k}{=} \sum_{k=1}^K \underline{X}_k \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{2 \cdot K+2}} + \sum_{m=1}^K \underline{X}_m^* \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot (2 \cdot K+2-m)}{2 \cdot K+2}} \\
 &= \sum_{k=1}^K \underline{X}_k \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{2 \cdot K+2}} + \sum_{m=1}^K \underline{X}_m^* \cdot e^{-j2\pi \frac{n \cdot m}{2 \cdot K+2}} \cdot \underbrace{e^{j2\pi \frac{n \cdot (2 \cdot K+2)}{2 \cdot K+2}}}_{=1} \\
 &= 2 \cdot \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left[\underline{X}_k \cdot e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{2 \cdot K+2}} \right]
 \end{aligned}$$

Tastet man andererseits das Signal $s(t)$ zu den Zeitpunkten

$$t = n \cdot \frac{T_S}{N} = n \cdot \frac{T_S}{2 \cdot K+2}$$

ab, so resultiert

$$s[n] = s\left(n \cdot \frac{T_S}{2 \cdot K+2}\right) = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left[\underline{X}_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T_S} n \cdot \frac{T_S}{2 \cdot K+2}} \right] = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left[\underline{X}_k \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot n}{2 \cdot K+2}} \right],$$

was, bis auf den Faktor 2, dem Ergebnis der inversen diskreten Fouriertransformation entspricht.