

$$\begin{aligned}
 m &= (3x_P^2 + a_4) \cdot (2y_P)^{-1} \\
 &= 71 \cdot (32)^{-1} \\
 &= 71 \cdot 25 \\
 &\equiv 36 \pmod{47}.
 \end{aligned}$$

Der Kehrwert von 32 wurde mit dem erweiterten Euklid'schen Algorithmus bestimmt und kann einfach verifiziert werden:  $32 \cdot 25 \pmod{47} = 1$ .

Damit ergeben sich für den Punkt  $2P$  die Koordinaten

$$\begin{aligned}
 x_{2P} &= m^2 - 2x_P \\
 &= 36^2 - 6 \\
 &\equiv 21 \pmod{47}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 y_{2P} &= m \cdot (x_P - x_R) - y_P \\
 &= 36 \cdot (-18) - 16 \\
 &\equiv 41 \pmod{47}.
 \end{aligned}$$

Also gilt  $2P = (21, 41)$ .

Für die Berechnung von  $3P = P + 2P$  geht man analog vor. Man setzt  $Q = 2P = (21, 41)$  und erhält

$$\begin{aligned}
 m &= (y_P - y_Q) \cdot (x_P - x_Q)^{-1} \\
 &= (-25) \cdot (-18)^{-1} \\
 &= (-25) \cdot 13 \\
 &\equiv 4 \pmod{47}.
 \end{aligned}$$

Damit resultiert für die Koordinaten von  $3P$

$$\begin{aligned}
 x_{3P} &= m^2 - x_P - x_Q \\
 &= 4^2 - 3 - 21 \\
 &\equiv 39 \pmod{47}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 y_{3P} &= m \cdot (x_P - x_R) - y_P \\
 &= 4 \cdot (-36) - 16 \\
 &\equiv 28 \pmod{47}.
 \end{aligned}$$

Also gilt  $3P = (39, 28)$ .