Lösungen Digitale Modulationsarten

Aufgabe 1

a)

$$s(t) = \sin(\omega_c t + \phi)$$

$$= \sin(\omega_c t)\cos(\phi) + \cos(\omega_c t)\sin(\phi)$$

$$= x(t)\cdot\cos(\omega_c t) - y(t)\cdot\sin(\omega_c t)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sin(\phi)$$

$$\underline{\underline{y(t) = -\cos(\phi)}}$$

b)

$$\underline{u}(t) = x(t) + j\,y(t)$$

$$= \sin(\phi) - j\cos(\phi)$$

$$Re[\underline{u}(t)\cdot e^{j\omega_c t}] = Re[(\sin(\phi) - j\cos(\phi))\cdot e^{j\omega_c t}]$$

$$= Re[(\sin(\phi) - j\cos(\phi))\cdot(\cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t))]$$

$$= Re[\sin(\phi)\cos(\omega_c t) - j\cos(\phi)\sin(\omega_c t) - j\cos(\phi)\cos(\omega_c t) + \sin(\omega_c t)\cos(\phi)]$$

$$= \sin(\phi)\cos(\omega_c t) + \cos(\phi)\cdot\sin(\omega_c t)$$

$$= \underline{\underline{\sin(\omega_c t + \phi)}}$$

c)

$$x(t) = LP\left[s(t) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_c t)\right]$$

$$= LP\left[\sin(\omega_c t + \phi) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_c t)\right]$$

$$= LP\left[\sin(\phi) + \sin(2\omega_c t + \phi)\right]$$

$$= \underline{\underline{\sin(\phi)}}$$

$$y(t) = LP\left[-s(t) \cdot 2 \cdot \sin(\omega_c t)\right]$$

$$= LP\left[-2 \cdot \sin(\omega_c t + \phi) \sin(\omega_c t)\right]$$

$$= LP\left[-\cos(\phi) + \cos(2\omega_c t + \phi)\right]$$

$$= \underline{\underline{-\cos(\phi)}}$$

d)

$$s(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c t) - y(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

$$= \sin(\phi) \cdot \cos(\omega_c t) + \cos(\phi) \cdot \sin(\omega_c t)$$

$$= \underline{\underline{\sin(\omega_c t + \phi)}}$$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

a) $$P(X=0) = 0$$

b) $$P(X \leq -0{,}5) = \int_{-\infty}^{-0{,}5} p(x)\,dx$$

$$= F(-0{,}5) = \phi\left(\frac{-0{,}5}{\sigma}\right)$$

$$= \phi(-0{,}25)$$

$$= \underline{\underline{0{,}401}}$$

c) $$P(X \geq 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5)$$

$$= 1 - F(0{,}5)$$

$$= 1 - \phi(+0{,}25)$$

$$= \underline{\underline{0{,}401}}$$

d) $$P(|X| \leq 0{,}5) = P(X \leq 0{,}5) - P(X \leq -0{,}5)$$

$$= F(0{,}5) - F(-0{,}5)$$

$$= \underline{\underline{0{,}197}}$$

Aufgabe 4

a) Erhöhung der Datenrate um den Faktor 4 bei gleichbleibender Bandbreite
   $\Rightarrow$ Verwendung von 16-PSK oder 16-QAM

b) Erhöhte Bitfehlerwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 5

Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
P &= \int_{-\sigma}^{+\sigma} p(x) \cdot dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2} \cdot |x|}{\sigma}} \cdot dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot \int_{0}^{+\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2} \cdot x}{\sigma}} \cdot dx \\
&= 1 - e^{-\sqrt{2}} \\
&= \underline{\underline{0.757}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

a)

$$s(t) = A \cdot \cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{2} m(t)\right)$$

$$= A\left[\cos(\omega_c t)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} m(t)\right)}_{=0} - \sin(\omega_c t)\underbrace{\sin\left(m(t)\frac{\pi}{2}\right)}_{=m(t)}\right]$$

$$= -A \cdot m(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

b)

$$s(t) = A \cdot \cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{2} \cdot m(t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A \cdot \cos\left(m(t) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

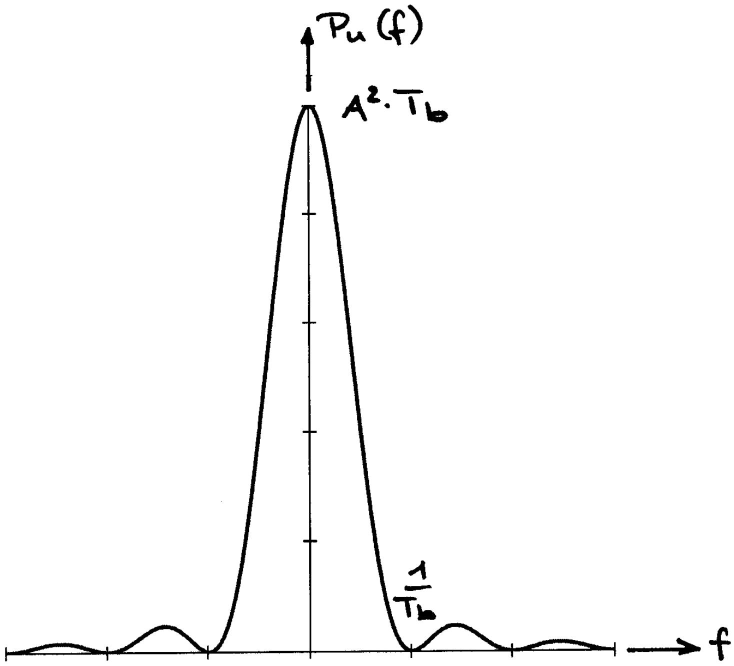
$$y(t) = A \cdot \sin\left(m(t) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= A \cdot m(t)$$

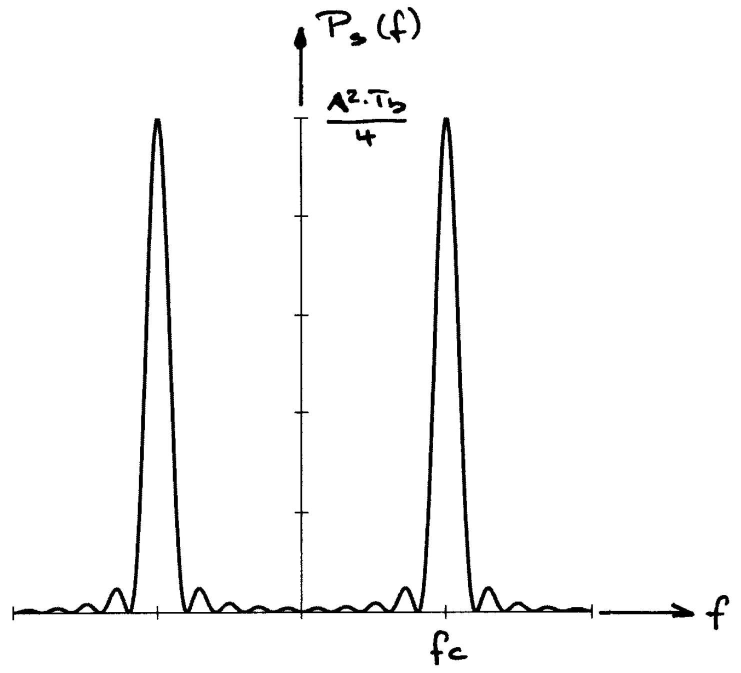
$$\Rightarrow \quad \underline{u}(t) = x(t) + j \cdot y(t)$$

$$= \underline{\underline{j \cdot A \cdot m(t)}}$$

c)



d)



e) Nullstellen bei $f_0 = f_c \pm k \cdot \frac{1}{T_b}$ $k \neq 0$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{2}{T_b}$$

Aufgabe 8

a)

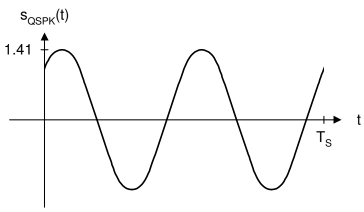
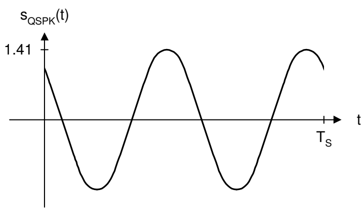
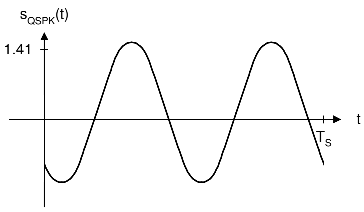
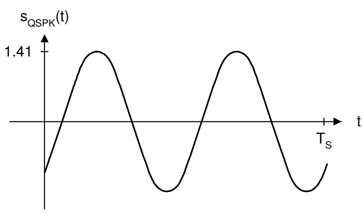
Verwendung eines kohärenten Demodulators
Besser geeignete Modulationsarten, z.B. mehrstufige Frequenzumtastung (MFSK)
Einsatz eines fehlerkorrigierenden Codes (Kanalcodierung)
Codierte Modulationsarten, z.B. TCM

b)

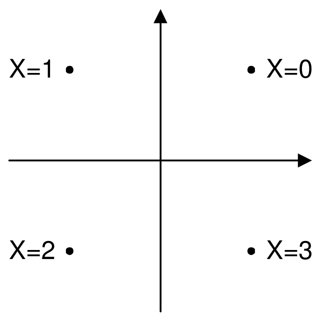
	Bandbreiteneffizienz	***Realisierungsaufwand***
Kohärenter Demodulator	*unverändert (könnte durch Halbieren des Frequenzabstands verbessert werden)*	*zusätzlicher Aufwand für die Trägerrückgewinnung*
Mehrstufige Frequenzumtastung	*verschlechtert sich*	*höher*
Fehlerkorrigierender Code	*nimmt aufgrund der zugefügten Redundanz ab*	*zusätzlicher Aufwand für Kanalcoder und -encoder*
Codierte Modulationsarten	*kann verbessert werden*	*höher*

Aufgabe 9

a)

X	$s_{QPSK}(t)$	Figur
0	$\cos(\omega_c \cdot t) + \sin(\omega_c \cdot t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$	
1	$\cos(\omega_c \cdot t) - \sin(\omega_c \cdot t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t + 3 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$	
2	$-\cos(\omega_c \cdot t) - \sin(\omega_c \cdot t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t - 3 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$	
3	$-\cos(\omega_c \cdot t) + \sin(\omega_c \cdot t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$	

b)



c)

Signale am Eingang der Tiefpassfilter

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \left[b_0 \cdot \cos(\omega_c \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega_c \cdot t)\right] \cdot 2 \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \\ &= 2 \cdot b_0 \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \cdot \cos(\omega_c \cdot t) + 2 \cdot b_1 \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \\ &= b_0 \cdot \left[1 + \cos(2 \cdot \omega_c \cdot t)\right] + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \omega_c \cdot t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= \left[b_0 \cdot \cos(\omega_c \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega_c \cdot t)\right] \cdot 2 \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \\
&= 2 \cdot b_0 \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t) + 2 \cdot b_1 \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \\
&= b_0 \cdot \sin(2 \cdot \omega_c \cdot t) + b_1 \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \omega_c \cdot t)\right]
\end{aligned}
$$

Signale am Ausgang der Tiefpassfilter

$$y_0(t) = b_0 \qquad\qquad y_1(t) = b_1$$

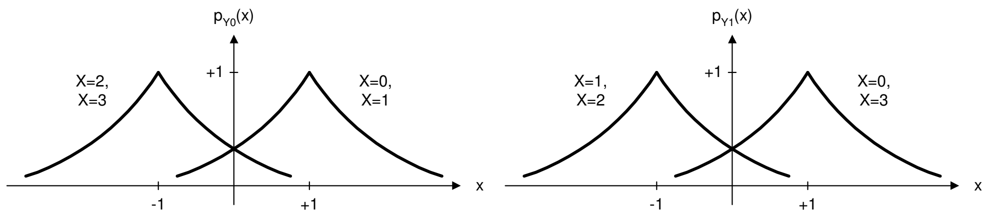
Entscheidungsvariablen

$$Y_0 = \frac{1}{T_S} \cdot \int_0^{T_S} b_0 \, dt = b_0 \qquad\qquad Y_1 = \frac{1}{T_S} \cdot \int_0^{T_S} b_1 \, dt = b_1$$

Ergebnis

X	Y_0	Y_1
0	+1	+1
1	+1	-1
2	-1	-1
3	-1	+1

d)



e)

$$\hat{b}_0 = \begin{cases} +1, & Y_0 > 0 \\ -1, & Y_0 < 0 \end{cases} \qquad\qquad \hat{b}_1 = \begin{cases} +1, & Y_1 > 0 \\ -1, & Y_1 < 0 \end{cases}$$

f)

$$P(Y_0 > 0 | b_0 = -1) = \int_0^{+\infty} p_X(x+1) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x+1}{0.5}} \, dx = 0.5 \cdot e^{-2} = 0.0677$$

Aufgabe 10

a)

Übergang von BPSK auf QPSK.
Bei gleicher Bitfehlerwahrscheinlichkeit können nun gleichzeitig zwei Bits übertragen werden.

b)

Methode	Vorteile	Nachteile	Massnahmen
16-PSK	einfach zu realisieren	BER verschlechtert	Fehlerkorrigierender Code, TCM
16-QAM	einfach zu realisieren	BER verschlechtert	Fehlerkorrigierender Code TCM
TCM	Codierungsgewinn ohne Erhöhung der Bandbreite	Höherer Realisierungsaufwand	

Aufgabe 11

Bedingung:

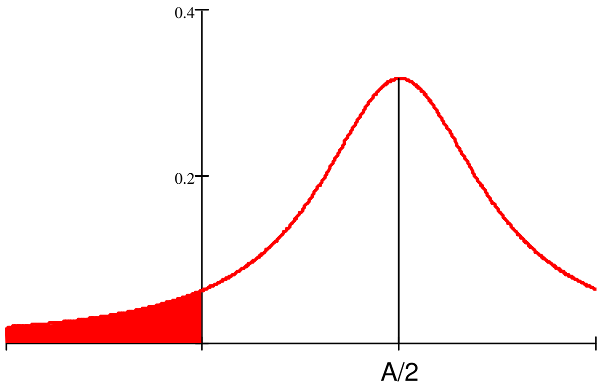
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx = 1$$

$$c \cdot \left(\underbrace{\arctan(+\infty)}_{=\pi/2} - \underbrace{\arctan(-\infty)}_{=-\pi/2} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{1}{\pi}}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariabeln X + Y für den Fall, dass eine 0 gesendet wurde:

$$p_{X+Y|0\text{ wurde gesendet}}(x) = p_X\left(x - \frac{A}{2}\right) = \frac{c}{1+\left(x-\frac{A}{2}\right)^2}$$



Wahrscheinlichkeit eines Bitfehlers für den Fall, dass eine 0 gesendet wurde:

$$P_{b|0\text{ wurde gesendet}} = \int_{-\infty}^{0} p_X\left(x-\frac{A}{2}\right)dx = \int_{-\infty}^{-A/2} p_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{-A/2} \frac{c}{1+u^2}\,du = c\cdot\left(\arctan\left(-\frac{A}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\arctan\left(-\frac{A}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$P_{b|0\text{ wurde gesendet}} = P_{b|1\text{ wurde gesendet}}$$

und somit resultiert für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit allgemein:

$$\underline{\underline{P_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Annahme:

BPSK-Signal: $\pm A\cdot\sin(\omega_c\cdot t)$

Tägernachbildung: $\sin(\omega_c\cdot t+\Delta\varphi)$

Signal am Ausgang des Mischers:

$$\pm A \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t + \Delta\varphi) = \frac{\pm A}{2} \cdot (\cos(\Delta\varphi) - \cos(2 \cdot \omega_c \cdot t + \Delta\varphi))$$

Nach Tiefpass: $\underline{\underline{\frac{\pm A}{2} \cdot \cos(\Delta\varphi)}}$

Aufgabe 12

a)

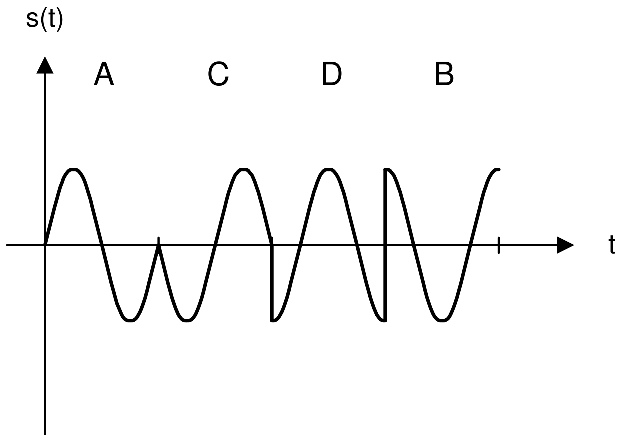
$$\textit{16 PSK} \Rightarrow \textit{4 Bit/Signal} \Rightarrow R = 4 \cdot 1/(1\mu s) = \underline{\underline{4\ Mbit/s}}$$

b)

$$\frac{E_b}{\eta} = \frac{P_{\text{Träger}} \cdot T_{\text{Symbol}} / 4}{\eta} = \frac{250\text{nWs}}{25\text{W/Hz}} = 10 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{10\text{dB}}}$$

Aufgabe 13

a)



b)

A	00
B	01
C	11
D	10

Aufgabe 14

Für eine fehlerfreie Übertragung muss gelten:

$$R \le C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{E_b}{\eta} \cdot \frac{R}{B}\right)$$

$$\frac{E_b}{\eta} \ge \frac{2^{\frac{R}{B}} - 1}{\frac{R}{B}}$$

$$\frac{E_b}{\eta} \ge \lim_{R/B \to 0}\left(\frac{2^{\frac{R}{B}} - 1}{\frac{R}{B}}\right) = \ln(2) = 0.696 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{-1.58\text{dB}}}$$

Aufgabe 15

a)

MPSK, QAM, (ASK), (TCM)

b)

Verschlechterung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit zunehmender Bandbreiteneffizienz, Abhilfe: Fehlerkorrigierende Codes, Codierte Modulation (TCM)

(Kohärente Demodulation , Abhilfe: DPSK)

c)

Aufgrund des hohen Bandbreitenbedarfs eigentlich schlecht geeignet
Einfach realisierbar (inkohärente Demodulation)

Aufgabe 16

Aufgabe 17

Aufgabe 18

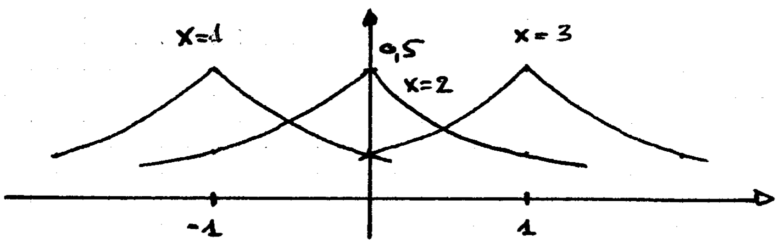
a) Bedingung: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 2c \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2c \cdot \left(-e^{-\infty} + e^{0}\right)$$

$$= 2c \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{1}{2}}}$$

b)



c) $x = 1$ und $x = 3$:

$$P_{e1/3} = \frac{1}{2} \int_{0,5}^{\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} e^{-0,5} = \underline{\underline{0,303}}$$

$x = 2$

$$P_{e2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{0,5}^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-0,5} = \underline{\underline{0,607}}$$

d) $P_e = P(U_1) \cdot P_{e1} + P(U_2) \cdot P_{e2} + P(U_3) \cdot P_{e3}$

$= \underline{\underline{0{,}485}}$

e) $$P_{e1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-\alpha}$$

$$P_{e2} = \frac{1}{2} \cdot \int_{1-\alpha}^{\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} e^{\alpha - 1}$$

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{2} e^{\alpha - 1}$$

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{2} e^{\alpha} \cdot e^{-1}$$

$$2 \cdot e = e^{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 0{,}847}}$$

f) $P_{e1} = P_{e2} = P_{e3} = \underline{\underline{0{,}429}}$

Aufgabe 19

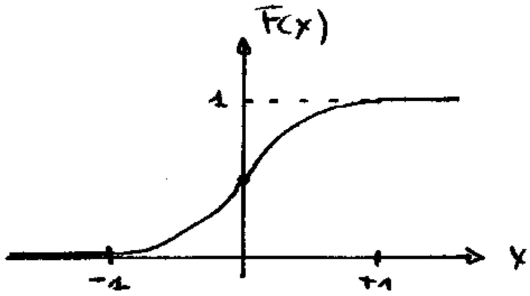
a) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du$$

$-1 \leq x \leq +1$: $$F(x) = \int_{-1}^{x} p(u)\, du$$

$$= \frac{3}{4}\int_{-1}^{x} (1-u^2)\, du$$

$$= \frac{3}{4}\left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right)}}$$



b) $$P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5)$$

$$= 1 - F(0{,}5) = \underline{\underline{0{,}156}}$$

Aufgabe 20

a) $s(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_c t + \Theta(t))$

$\Rightarrow \quad x(t) = A(t) \cdot \cos(\Theta(t))$

$\quad\quad y(t) = A(t) \cdot \sin(\Theta(t))$

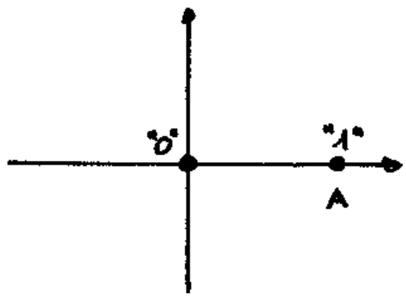
$s_0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0$

$\quad\quad \underline{\underline{y(t) = 0}}$

$s_1(t) = A \cdot \cos(\omega_c t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = A$

$\quad\quad \underline{\underline{y(t) = 0}}$

b)



c) $\left.\begin{array}{l} E_{b0} = 0 \\ E_{b1} = \dfrac{A^2}{2} \cdot T_b \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{E_b = \dfrac{A^2}{4} \cdot T_b}}$

d) $$x(t) = \left[r(t) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_c t) \right]_{LP}$$

$$s_0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0$$

$$\underline{\underline{Y_0 = 0}}$$

$$s_1(t) = A \cdot \cos(\omega_c t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \left[2 \cdot A \cdot \cos^2(\omega_c t) \right]_{LP}$$

$$= \left[2 \cdot A \cdot \tfrac{1}{2} \left(1 + \cos(2\omega_c t) \right) \right]_{LP}$$

$$= \underline{\underline{A}}$$

$$Y_1 = \int_0^{T_b} x(t)\, dt = \int_0^{T_b} A\, dt = \underline{\underline{A \cdot T_b}}$$

e) $$P_{e0} = \int_{\frac{A \cdot T_b}{2}}^{\infty} p(x)\, dx = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{A \cdot T_b}{2}} p(x)\, dx$$

$$= \underline{\underline{1 - F\left(\frac{A \cdot T_b}{2} \right)}}$$

f) $$P_{e1} = \int_{-\infty}^{\frac{A \cdot T_b}{2}} p\left(x - A \cdot T_b \right) dx = \int_{-\infty}^{-\frac{A T_b}{2}} p(u)\, du$$

$$= \underline{\underline{F\left(-\frac{A \cdot T_b}{2} \right)}}$$

g) $F(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$

$$\Rightarrow P_{e0} = 1 - \Phi\left(\frac{A T_b}{2\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{A T_b}{2}\right)$$

$$P_{e1} = \Phi\left(-\frac{A \cdot T_b}{2\sigma}\right)$$

mit $A = 2 \cdot \sqrt{E_b / T_b}$

$\sigma = \sqrt{\eta \cdot T_b}$

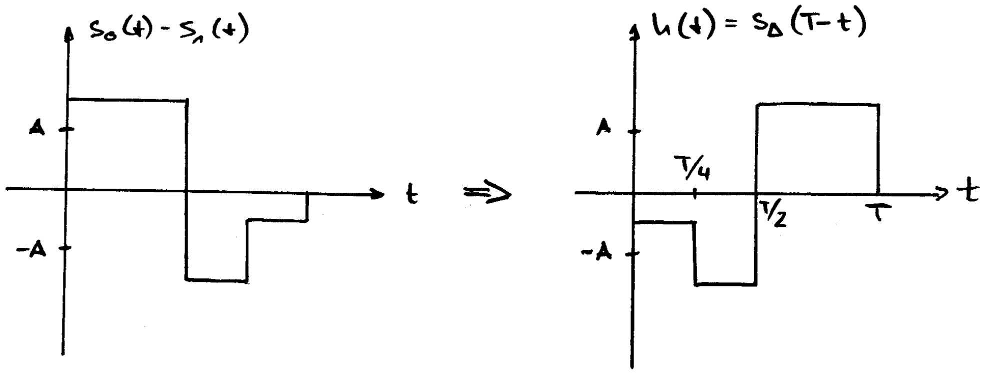
$$\Rightarrow P_e = \underline{\underline{\Phi\left(-\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)}}$$

h) Vergleich mit BPSK: $P_e = \Phi\left(-\sqrt{2\frac{E_b}{\eta}}\right)$

$\Rightarrow$ Unterschied von 3dB.

Aufgabe 21

a) Matched Filter auf $s_\Delta(t) = s_0(t) - s_1(t)$



b) $$\gamma_{th} = \frac{E_{s0} - E_{s1}}{2}$$

$$E_{s0} = A^2 \cdot T \qquad E_{s1} = \frac{A^2}{4} \cdot T$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma_{th} = \frac{3}{8} A^2 T$$

c) $$P_e = \Phi\left(- \sqrt{\frac{E_{s0} - 2\rho_{01}\sqrt{E_{s0}E_{s1}} + E_{s1}}{2\eta}}\right)$$

$$\rho_{01} = \frac{1}{\sqrt{E_{s0}E_{s1}}} \underbrace{\int_0^T s_0(\tau)\, s_1(\tau)\, d\tau}_{= -\frac{A^2}{2} \cdot \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{A^2 T}{4}}{\sqrt{A^4 T^2 \cdot 1/4}} = -\frac{1}{2}$$

$$P_e = \phi\left(-\sqrt{\frac{A^2T + A^2T/2 + A^2T/4}{2\cdot\eta}}\right)$$

$$= \underline{\underline{\phi\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\frac{A^2T}{\eta}}\right)}}$$

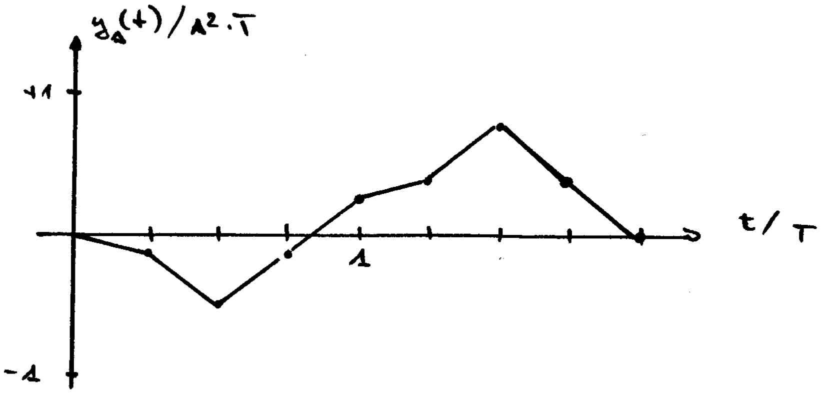
d) $$y_\Delta(T) = \int_0^T r(\tau)\cdot h(T-\tau)\, d\tau$$

$$= A\cdot\int_0^T h(T-\tau)\, d\tau$$

$$= \underline{\underline{A^2T\cdot\frac{1}{4}}}$$

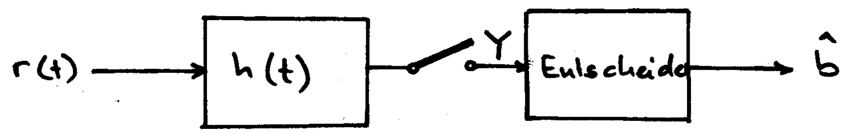
$$y_\Delta(T) < Y_{th} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{b} = 1}}$$

e)

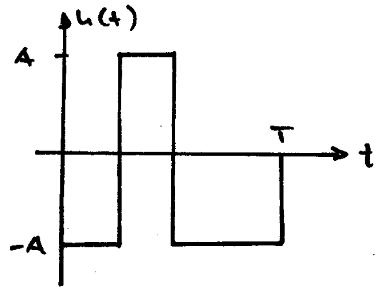


Aufgabe 22

a)



$$h(t) = s_0(T-t) - s_1(T-t) = -s_1(T-t)$$



$$Y_{th} = \frac{E_{s0} - E_{s1}}{2} = \frac{0 - A^2T}{2} = -\frac{A^2T}{2}$$

Entscheidungsregel:

$$Y < -\frac{A^2T}{2} \Rightarrow \hat{b} = 1$$

$$Y > -\frac{A^2T}{2} \Rightarrow \hat{b} = 0$$

b)

$$E_{s0} = 0$$

$$E_{s1} = A^2 \cdot T$$

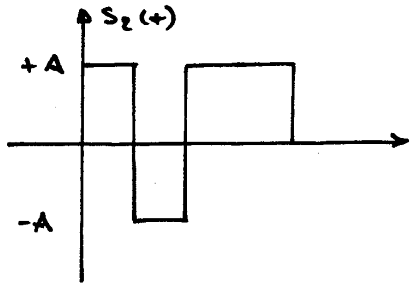
$$\rho_{01} \cdot \sqrt{E_{s0} \cdot E_{s1}} = \int_0^T s_0(\tau) \cdot s_1(\tau)\, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P_{error} = \phi\left(-\sqrt{\frac{A^2T}{2 \cdot \eta}}\right)}}$$

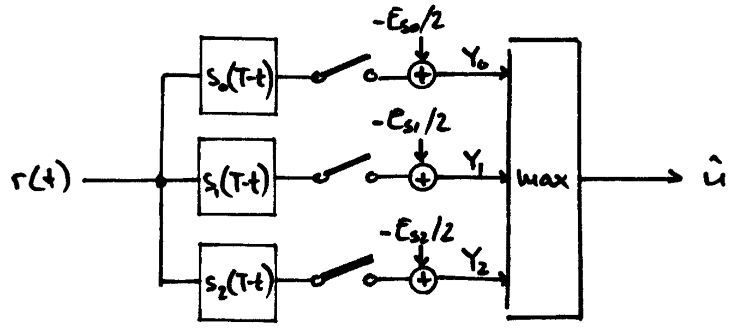
c) $E_{s2} = E_{s1} = A^2 \cdot T$

$$\int_0^T s_1(\tau) \cdot s_2(\tau)\, d\tau = 0$$

Beispiel:

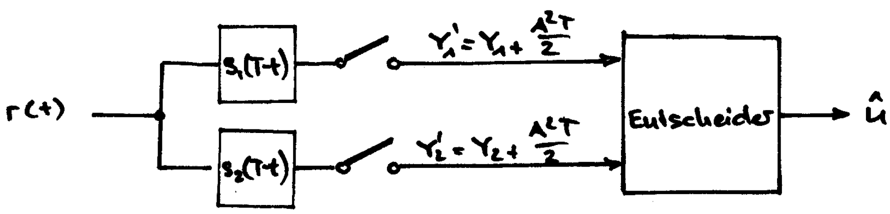


d) Allgemeine Struktur:



Gegebenes System: $s_0(t) = 0$

$E_{s0} = 0$; $E_{s1} = E_{s2} = A^2T$



e) Entscheidungsregel:

$\hat{u} = 0$, falls $\quad Y_0 > Y_1$ und $Y_0 > Y_2$

$\Rightarrow \quad Y_1 < 0$ und $Y_2 < 0$

$\Rightarrow \quad Y_1' < \frac{A^2 \cdot T}{2}$ und $Y_2' < \frac{A^2 \cdot T}{2}$

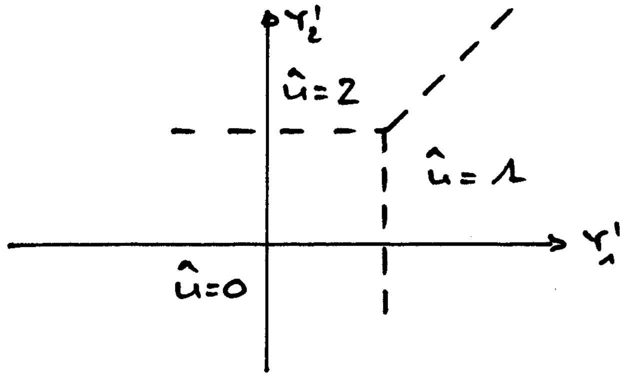
$\hat{u} = 1$, falls $\quad Y_1 > Y_0$ und $Y_1 > Y_2$

$\Rightarrow \quad Y_1 > 0$ und $Y_1 > Y_2$

$\Rightarrow \quad Y_1' > \frac{A^2 T}{2}$ und $Y_1' > Y_2'$

$\hat{u} = 2$, falls $\quad Y_2 > Y_0$ und $Y_2 > Y_1$

$\Rightarrow \quad Y_2' > \frac{A^2 T}{2}$ und $Y_2' > Y_1'$



f) Empfänger entscheidet sich korrekt, falls $z_1 < \frac{A^2T}{2}$ und $z_2 < \frac{A^2T}{2}$.

z_1 und z_2 sind Gaussverteilte Zufallsvariablen mit dem Mittelwert $m = 0$ und der Varianz

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{2} \cdot A^2 \cdot T$$

$$\Rightarrow \quad Pr\left[z_1 < \frac{A^2T}{2}\right] = \phi\left(\frac{\frac{A^2T}{2} - m_{z1}}{\sigma_{z1}^2}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{\frac{A^2T}{2}}{\sqrt{\frac{\eta}{2} A^2 T}}\right)$$

$$= \phi\left(\sqrt{\frac{A^2 \cdot T}{2 \cdot \eta}}\right)$$

$$Pr\left[z_2 < \frac{A^2T}{2}\right] = \phi\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2 \cdot \eta}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_{korrekt} = Pr\left[\left(z_1 < \frac{A^2T}{2}\right) \text{ und } \left(z_2 < \frac{A^2T}{2}\right)\right]$$

$$= Pr\left[z_1 < \frac{A^2T}{2}\right] \cdot Pr\left[z_2 < \frac{A^2T}{2}\right]$$

$$= \underline{\underline{\phi^2\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2\eta}}\right)}}$$

Aufgabe 23

a) $$E_0 = \int_0^T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\cdot t\right) dt = \underline{\underline{\frac{T}{2}}}$$

b) $$E_1 = \int_0^T \sin^2\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{T}\cdot t\right) dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^T 1\cdot dt - \frac{1}{2}\cdot\int_0^T \cos\left(\alpha\frac{2\pi}{T}t\right) dt$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\alpha\frac{2\pi}{T}t\right)}{\alpha\frac{2\pi}{T}}\Bigg|_0^T$$

$$= \underline{\underline{\frac{T}{2} - \frac{T}{4\pi\alpha}\cdot\sin(2\pi\alpha)}}$$

c) $$\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\cdot\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \overset{!}{=} \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \frac{k}{2}}}$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0$$

d) $$\int_0^T s_0(t)\, s_1(t)\, dt = \int_0^T \sin\left(\pi\cdot\frac{t}{T}\right)\sin\left(\alpha\pi\frac{t}{T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left((1-\alpha)\pi\frac{t}{T}\right) dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left((1+\alpha)\pi\frac{t}{T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left((1-\alpha)\pi\frac{t}{T}\right)}{(1-\alpha)\pi/T}\Bigg|_0^T - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left((1+\alpha)\pi\frac{t}{T}\right)}{(1+\alpha)\pi/T}\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\sin(\pi-\alpha\pi)}{1-\alpha} - \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\sin(\pi+\alpha\pi)}{1+\alpha}$$

$$= \frac{T}{2\pi}\cdot\left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{1+\alpha}\right] = \frac{T}{\pi}\cdot\frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2}$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_0 \cdot E_1}} \cdot \int_0^T s_0(t)\, s_1(t)\, dt = \frac{\frac{T}{\pi} \cdot \frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2}}{\frac{T}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2}}{\sqrt{1 - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}}}$$

e) $$\int_0^T s_0(t)\, s_1(t)\, dt = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = k}} \qquad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 1$$

f) $$P_e = \phi\left(-\sqrt{\frac{E_0 - 2 \cdot \rho \cdot \sqrt{E_0 E_1} + E_1}{2\eta}}\right)$$

$$= \phi\left(-\sqrt{\frac{T/2 - 2 \cdot T/\pi \cdot \frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2} + T/2 - T/2 \cdot \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}}{2 \cdot \eta}}\right)$$

$$= \phi\left(-\sqrt{T \cdot \frac{2 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2} - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}}{4 \cdot \eta}}\right)$$

g) $$Y_{th} = \frac{E_0 - E_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}\right)$$

$$= \frac{T}{4} \cdot \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}$$

h) $\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad s_0(t) = \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$

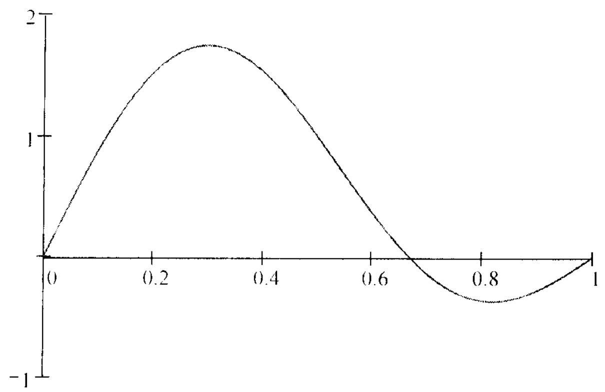
$$s_1(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$h(t) = s_0(T-t) - s_1(T-t)$$

$$= \sin\left(\pi - \pi\frac{t}{T}\right) - \sin\left(2\pi - 2\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$= \sin\left(\pi\frac{t}{T}\right) + \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$= \underline{\underline{2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}\right)}}$$



i) $$y_\Delta(T) = \int_0^T r(\tau)\, h(T-\tau)\, d\tau = \int_0^T h(T-\tau)\, d\tau > 0$$

$$\Rightarrow \quad y_\Delta(T) > Y_{th}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{b} = 0}}$$

Aufgabe 24

a)

$$s_{BP}(t) = \cos(\omega_0 t)\cos(\Delta\omega t) + \sin(\omega_0 t)\sin(\Delta\omega t) + 2\cdot\cos(\omega_0 t)\cos(\Delta\omega t) - 2\cdot\sin(\omega_0 t)\sin(\Delta\omega t)$$

$$= \left[\cos(\Delta\omega t) + 2\cdot\cos(\Delta\omega t)\right]\cdot\cos(\omega_0 t) - \left[-\sin(\Delta\omega t) + 2\cdot\sin(\Delta\omega t)\right]\cdot\sin(\omega_0 t)$$

$$= \underbrace{3\cdot\cos(\Delta\omega t)}_{x(t)}\cdot\cos(\omega_0 t) - \underbrace{\sin(\Delta\omega t)}_{y(t)}\cdot\sin(\omega_0 t)$$

$$\underline{u}(t) = x(t) + j\cdot y(t) = \underline{\underline{3\cdot\cos(\Delta\omega t) + j\cdot\sin(\Delta\omega t)}}$$

Aufgabe 25

a) $$E_0 = \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \underline{\underline{\frac{T}{2}}}$$ (1)

b) $$E_1 = \int_0^T \sin^2\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^T \left[1 - \cos\left(2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}t + 2\varphi\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin\left(2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}t + 2\varphi\right)}{2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\left[T - T\cdot\frac{\sin(5\pi + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{5\pi}\right]$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\left[T + T\cdot\frac{2\cdot\sin(2\varphi)}{5\pi}\right]}}$$ (4)

c) $$E_0 = E_1 \quad\Rightarrow\quad T\cdot\frac{2\cdot\sin(2\varphi)}{5\pi} = 0$$

$$\Rightarrow\quad 2\varphi = k\cdot\pi$$

$$\underline{\underline{\varphi = k\cdot\frac{\pi}{2}}} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

(2)

d) $$\int_0^T s_0(t)\cdot s_1(t)\,dt = \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cdot \sin\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^T \left[\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) - \cos\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T}+\varphi\right)}{\frac{\pi}{2T}} - \frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)}{\frac{9}{2}\frac{\pi}{T}}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)-\sin(\varphi)}{\frac{\pi}{2T}} - \frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi+\varphi\right)-\sin(\varphi)}{\frac{9}{2}\frac{\pi}{T}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}{\frac{\pi}{2T}} - \frac{\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}{\frac{9}{2}\frac{\pi}{T}}\right]$$

$$= \frac{T}{\pi}\cdot\frac{8}{9}\cdot\left[\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\right]$$ (5)

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{\frac{T}{\pi}\cdot\frac{8}{9}\cdot\left[\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\right]}{\frac{T}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{2\sin(2\varphi)}{5\pi}}}$$

$$= \frac{16}{9\pi}\cdot\frac{\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}{\sqrt{1+\frac{2\sin(2\varphi)}{5\pi}}}$$ (1)

e) $\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \sin(\varphi)$

$\Rightarrow \quad tg(\varphi) = 1$ (2)

$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$

f) $$Y_{Th} = \frac{E_0 - E_1}{2}$$

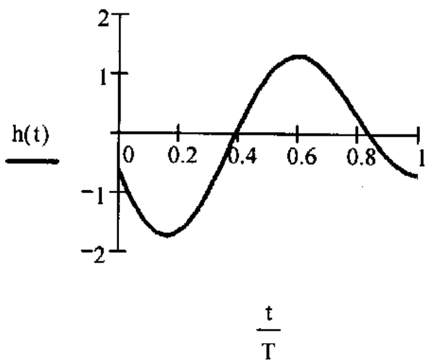
$$= \frac{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\left(1 + \frac{2\sin(2\varphi)}{5\pi}\right)}{2}$$

$$= -\frac{T}{4} \cdot \frac{2\sin(2\varphi)}{5\pi}$$

$$= -\frac{T}{10 \cdot \pi} \cdot \sin(2\varphi)$$ (2)

g) $$h(t) = s_0(T-t) - s_1(T-t)$$

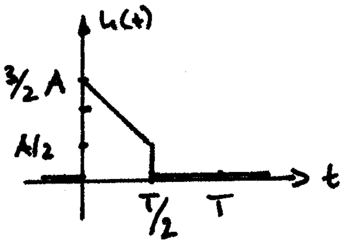
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{T}(T-t)\right) - \sin\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{2\pi}{T}(T-t) + \frac{\pi}{4}\right)$$



(3)

Aufgabe 26

a) $$h(t) = s_0(T-t) - s_1(T-t)$$



b) $$E_0 = \int_0^T \left(A \cdot \frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{3} = \frac{A^2 \cdot T}{3}$$

$$E_1 = 2 \cdot \int_0^{T/2} \left(A \cdot \frac{t}{T}\right)^2 dt = 2 \cdot \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{3 \cdot 8} = \frac{A^2 \cdot T}{12}$$

$$Y_{th} = \frac{E_0 - E_1}{2} = \frac{A^2 \cdot T}{8}$$

c) $$\int_0^T s_0(t)\, s_1(t)\, dt = \int_0^{T/2} \left(A \frac{t}{T}\right)^2 dt - \int_{T/2}^{T} \frac{A^2}{T^2} \cdot t \cdot \left(t - \frac{1}{2}T\right) dt$$

$$= \frac{A^2 T}{24} - \int_0^{T/2} \frac{A^2}{T^2} \left(t' + \frac{T}{2}\right) \cdot t' \, dt'$$

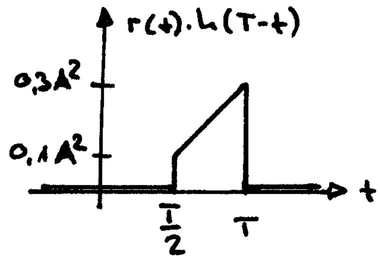
$$= \frac{A^2 T}{24} - \frac{A^2 T}{24} - \frac{A^2 T}{16} = -\frac{A^2 T}{16}$$

$$\rho = \frac{\int_0^T s_0(t)\, s_1(t)\, dt}{\sqrt{E_0 \cdot E_1}} = -\frac{6}{16} = \underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$P_e = \phi\left(-\sqrt{\frac{E_0 - 2\cdot\rho\cdot\sqrt{E_0E_1} + E_1}{2\eta}}\right)$$

$$= \phi\left(-\sqrt{\frac{13}{24}\cdot\frac{A^2T}{2\eta}}\right)$$

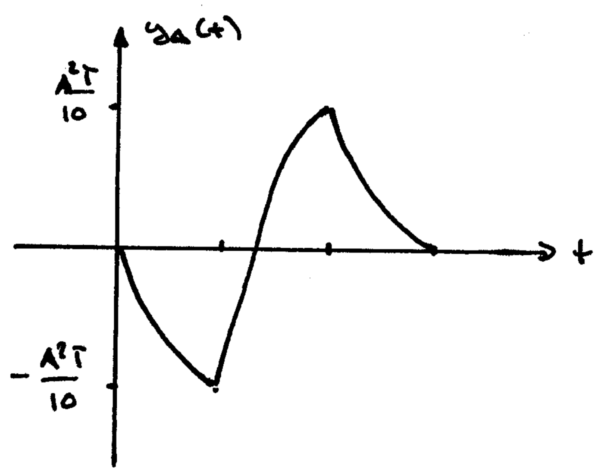
d) $$y_a(T) = \int_0^T r(t)\cdot h(T-t)\,dt$$



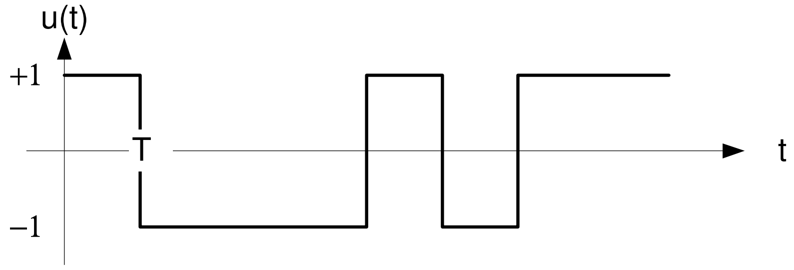
$$\Rightarrow y_a(T) = \underline{\underline{0{,}1\cdot A^2\cdot T}}$$

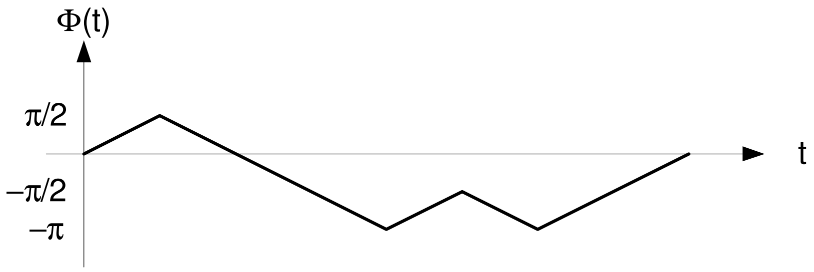
$$y_a(T) < Y_{th} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{b} = 1}}$$

e)

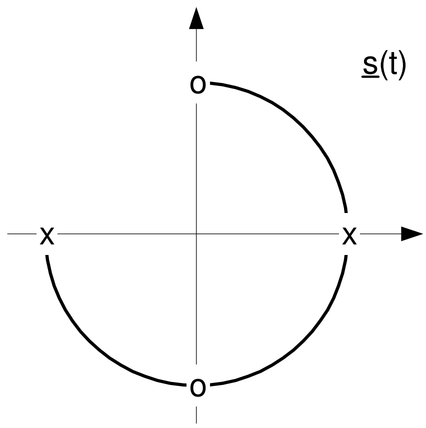


Aufgabe 27





i	0	1	2	3	4	5	6	7
s(i·T)	1	j	1	-j	-1	-j	-1	-j



Aufgabe 28

a) $b_0 = +1 \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$

$b_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad s(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$

b) $$E_b = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \frac{1}{\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} dt$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \tau$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \cdot \tau}}}$$

c) $$h_e(t) = s(i \cdot T - t)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\left(\frac{i \cdot T - t}{\tau}\right)^2} \qquad i = 0$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}}}$$

d) $$H_{tot}(f) = H_s(f) \cdot H_e(f)$$

$$= H_s^2(f) = \pi \cdot e^{-2 \cdot (\pi f \tau)^2}$$

$$h_{tot} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\tau} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

e) Aus Symmetriegründen:

$$Y_i > 0 \Rightarrow \hat{b}_i = +1$$

$$Y_i < 0 \Rightarrow \hat{b}_i = -1$$

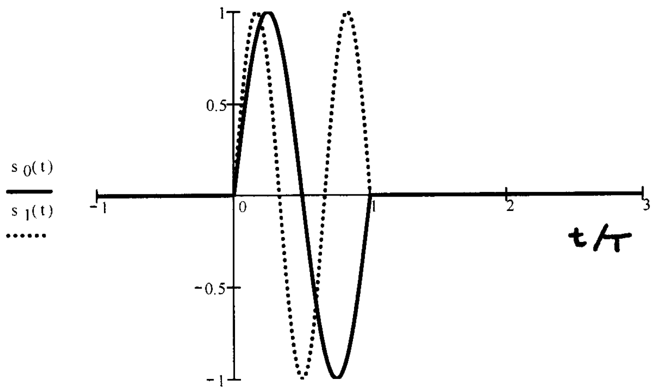
f) Antipodale Signalisierung:

$$P_b = \Phi\left(-\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

g) Da die Impulsantwort keine Nullstellen aufweist, kann die 1. Nyquistbedingung nicht erfüllt werden.

Aufgabe 29

a)



b)

$$h_0(t) = s_0(T-t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(T-t)\right) & 0 \le T-t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin\left(-\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h_1(t) = s_1(T-t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{T}(T-t)\right) & 0 \le T-t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} \sin\left(3\pi - \frac{3\pi}{T}\cdot t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{T} t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $$y_{0|0}(T) = \int_0^T s_0(\tau)\, h_0(T-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^T s_0^2(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^T \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T}\tau\right)\right) d\tau$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot T}}$$

$$y_{1|0}(T) = \int_0^T s_0(\tau)\cdot h_1(T-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^T s_0(\tau)\cdot s_1(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \left(\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{T}\tau\right)\right) d\tau = \underline{\underline{0}}$$

d)

$$y_{0|1}(T) = \int_0^T s_1(\tau) \cdot h_0(T-\tau) \; d\tau$$

$$= \int_0^T s_1(\tau) \; s_0(\tau) \; d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \left[\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{T}\tau\right)\right] d\tau$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$y_{1|1}(T) = \int_0^T s_1(\tau) \; h_1(T-\tau) \; d\tau$$

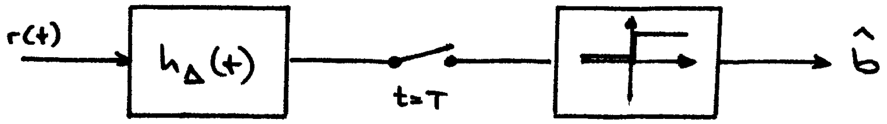
$$= \int_0^T s_1^2(\tau) \; d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \left[1 - \cos\left(\frac{6\pi}{T}\tau\right)\right] d\tau$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \; T}}$$

Aufgabe 30

a)

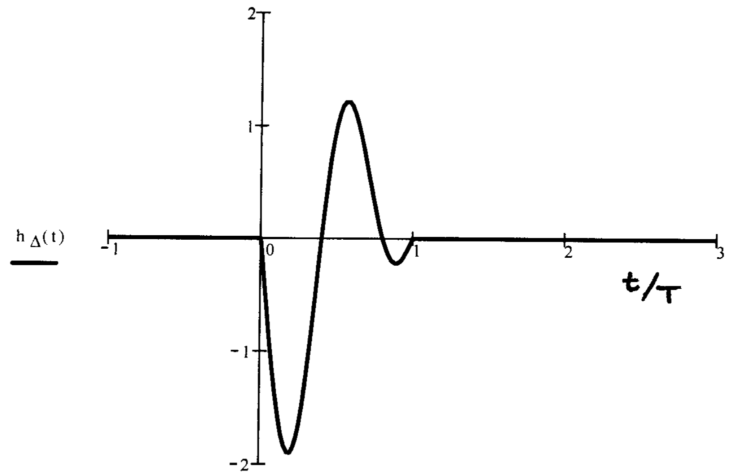


b)

$$h_\Delta(t) = s_0(T-t) - s_1(T-t)$$

$$= h_0(t) - h_1(t)$$

$$= \begin{cases} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{T}t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



c)

$$\rho_{01} = \int_0^T s_0(\tau)\, s_1(\tau)\, d\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{s0} \cdot E_{s1}}} = 0$$

$$E_{s0} = E_{s1} = \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{error} = \underline{\underline{\Phi\left(-\sqrt{\frac{T}{2\cdot\eta}}\right)}}$$

Aufgabe 31

a) Es gilt: $h(t) = s(T-t) \qquad 0 \leq t \leq T$

$$\Rightarrow \quad h(T-\tau) = s(T-T+\tau)$$
$$= s(\tau) \qquad 0 \leq \tau \leq T$$

Ausgang des matched Filters (rechte Schaltung)

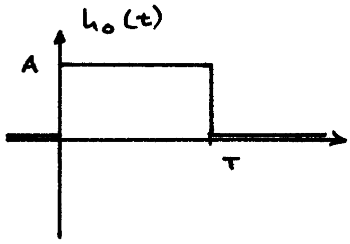
$$y(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \cdot h(T-\tau) \, d\tau$$
$$= \int_{0}^{T} r(\tau) \cdot s(\tau) \, d\tau$$

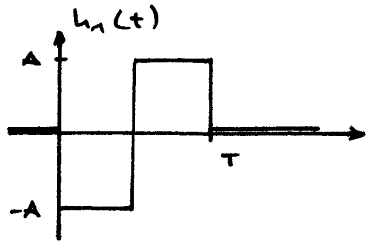
Ausgang des Korrelationsempfängers (linke Schaltung)

$$y(T) = \int_{0}^{T} r(\tau) \cdot s(\tau) \, d\tau$$

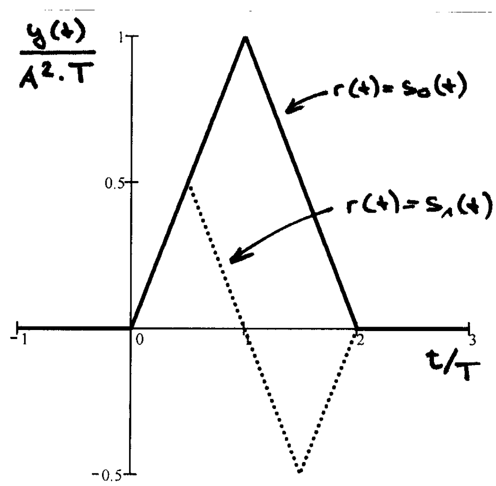
Aufgabe 32

a)

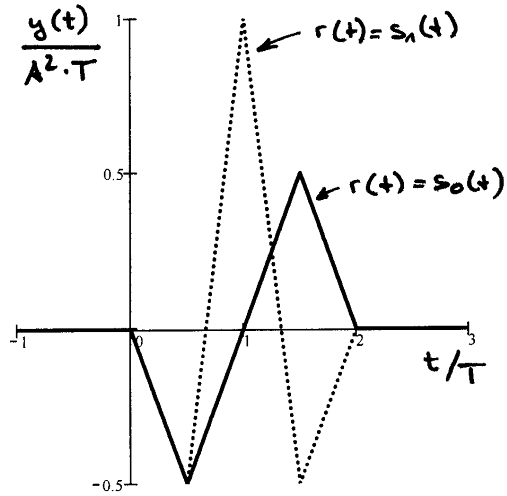




b) Ausgangssignal des Filters $h_0(t)$



Ausgangssignal des Filters $h_1(t)$



c) $\rho_{01} = \int_0^T s_0(\tau)\, s_1(\tau)\, d\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{s0} E_{s1}}} = 0$

$\longrightarrow$ orthogonale Signale

$$E_{s0} = E_{s1} = \int_0^T s_i^2(\tau)\, d\tau = A^2 \cdot T$$

$$\Rightarrow \quad P_{error} = \underline{\underline{\Phi\left(-\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta}}\right)}}$$