LÖSUNGEN (INFORMATIONSTHEORIE)

Aufgabe 1

a)

X	P(X)
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32

a) $P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) H(X) = 2 bit

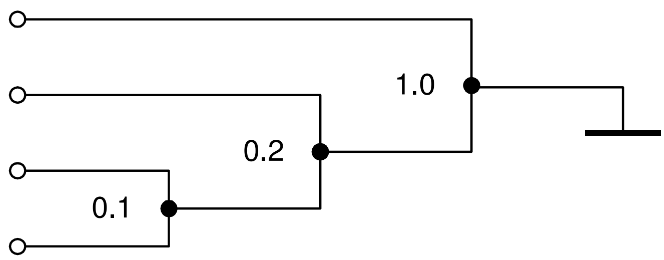
c) n-te Frage: „Wurde im n-ten Versuch Kopf geworfen?“
$\Rightarrow$ Durchschnittlich 2 Fragen notwendig

Aufgabe 2

a) H = 0.994

b)

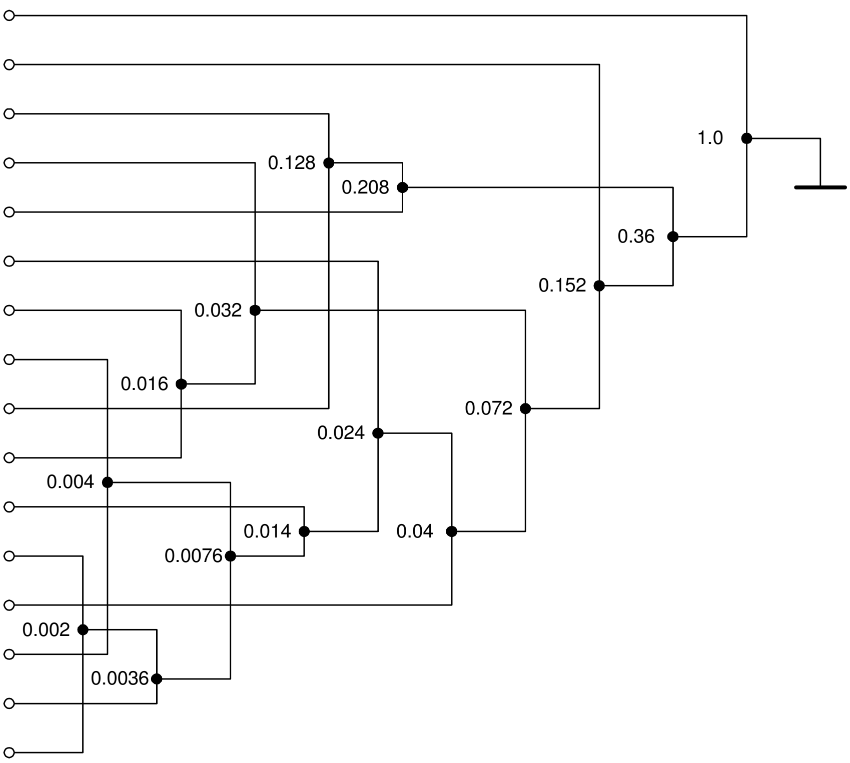
U	P(U)
A	0.8
B	0.1
C	0.08
D	0.02



E[W] = 1.3

c)

V	P(V)	Codewort
AA	0.64	1
AB	0.08	001
AC	0.064	0111
AD	0.016	00011
BA	0.08	010
BB	0.01	000011
BC	0.008	000101
BD	0.002	000010011
CA	0.064	0110
CB	0.008	000100
CC	0.0064	0000101
CD	0.0016	0000100011
DA	0.016	00000
DB	0.002	000010010
DC	0.0016	000010000
DD	0.0004	0000100010



E[W]/L = 1.0316

Aufgabe 3

a) Ein optimaler binärer präfixfreier Code erfüllt immer die Bedingung:

$$\frac{E[W]}{L} \le H(U) + \frac{1}{L}.$$

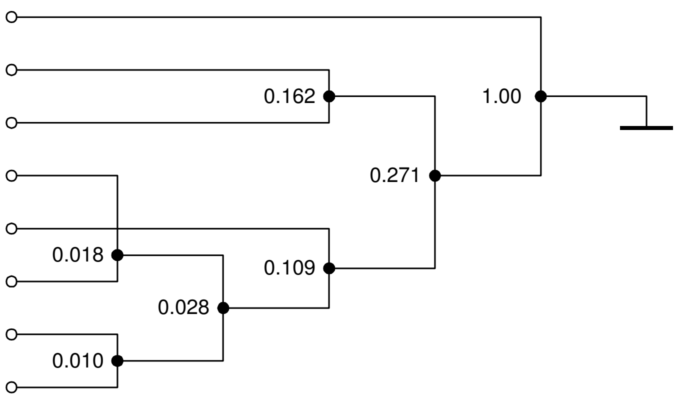
Mit H(U) = h(0.9) = 0.469 bit und

$$\frac{E[W]}{L} \le 0.81$$

muss L = 3 gewählt werden.

b) Es werden jeweils drei Symbole zu einer Symbolfolge V = (U_1, U_2, U_3) zusammengefasst. Für die Symbolfolge V wird anschliessend ein Huffman-Code entworfen. Bezeichnen wir die beiden möglichen Symbole der binären Quelle mit a und b, so ergibt sich folgender Codebaum:

V=(U_1, U_2, U_3)	P(V)	Codewort
aaa	0.729	1
aab	0.081	011
aba	0.081	010
abb	0.009	00011
baa	0.081	001
bab	0.009	00010
bba	0.009	00001
bbb	0.001	00000



$\Rightarrow$ E[W]/L = 0.5327

Aufgabe 4

a) $P_S = R \cdot E_b$

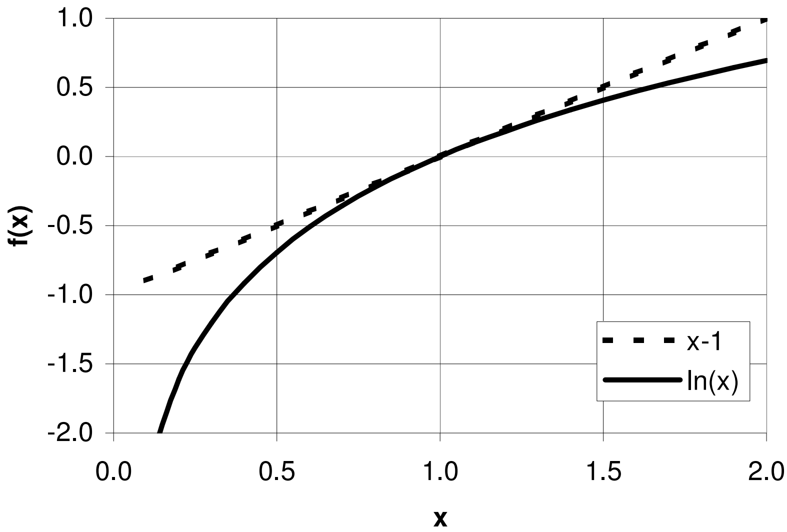
b) $E_b \geq \eta \cdot \frac{B}{R} \cdot \left(2^{\frac{R}{B}} - 1 \right)$

c) $\frac{E_b}{\eta} \geq \ln(2) \mathrel{\hat{=}} -1.59 \text{ dB}$

d) $E_b \geq k \cdot T \cdot \ln(2) = 2.8 \cdot 10^{-21} \text{J}$

Aufgabe 5

a)



Aus Figur $\Rightarrow \ln(x) \leq x-1 \Rightarrow \log_2(x) \leq \dfrac{x-1}{\ln(2)}$

b)

$$
\begin{aligned}
H - \log_2(L) &= \sum_{i=1}^{L} P(u_i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(u_i)}\right) - \log_2(L) \\
&= \sum_{i=1}^{L} P(u_i) \cdot \left(\log_2\left(\frac{1}{P(u_i)}\right) - \log_2(L) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{L} P(u_i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{L \cdot P(u_i)}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{L} P(u_i) \cdot \left(\frac{1}{L \cdot P(u_i)} - 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{L} - \sum_{i=1}^{L} P(u_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

c) $\dfrac{1}{L \cdot P(u_i)} = 1 \Rightarrow P(u_i) = \dfrac{1}{L}$

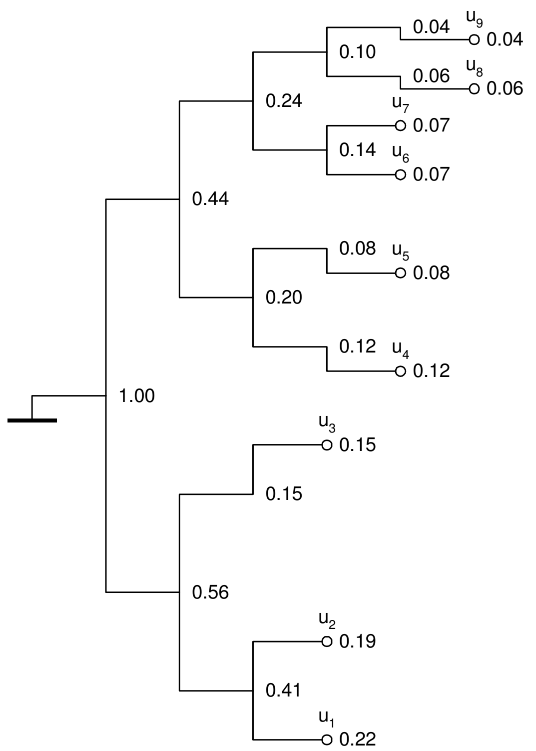
Aufgabe 6

a)

i	$P(u_i)$	$Q_i = \sum_{j=1}^{i-1} P(u_j)$	$L(u_i) = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{P(u_i)}\right) \right\rceil$	Die ersten $L(u_i)$ Nachkommastellen einer Binärdarstellung von Q_i
1	0.22	0.00	3	000
2	0.19	0.22	3	001
3	0.15	0.41	3	011
4	0.12	0.56	4	1000
5	0.08	0.68	4	1010
6	0.07	0.76	4	1100
7	0.07	0.83	4	1101
8	0.06	0.90	5	11100
9	0.04	0.96	5	11110

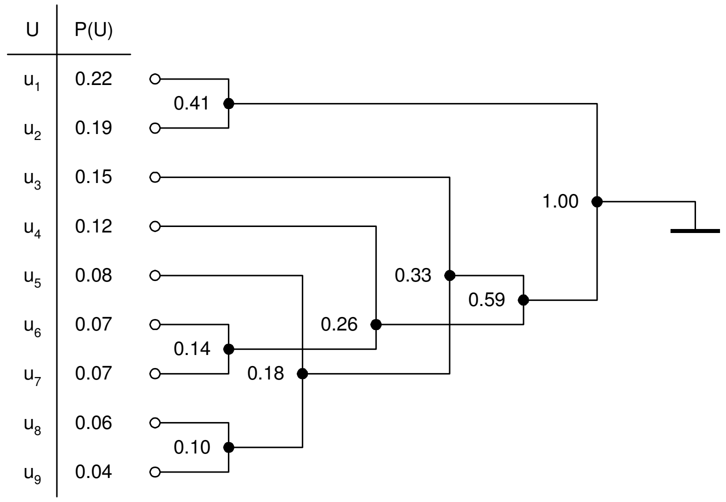
a) Ja

b)



$E[W] = 3.54$

c)



E[W] = 3.01. Im Vergleich: H(U) = 2.97 bit.

Aufgabe 7

a) Es gilt das Codierungstheorem für Einzelsymbole:

$$H \leq E[W] < H + 1,$$

wobei

$$H = -\,0.7 \cdot \log_2(0.7) - 0.2 \cdot \log_2(0.2) - 0.1 \cdot \log_2(0.1) = 1.157 \text{ bit.}$$

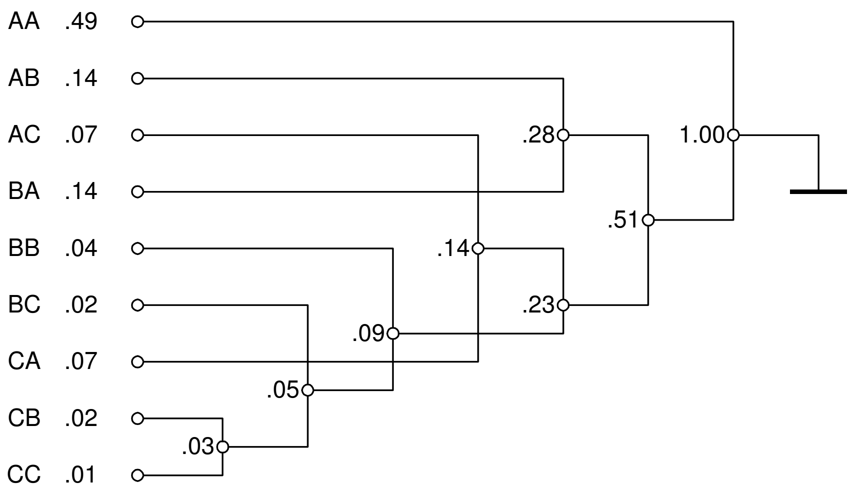
(Andere Möglichkeit: Konstruieren des optimalen Codes ⇒ E[W] = 1.3)

b) Es gilt das Codierungstheorem für Symbolketten:

$$H \leq \frac{E[W]}{L} < H + \frac{1}{L},$$

wobei L = 5.

c)



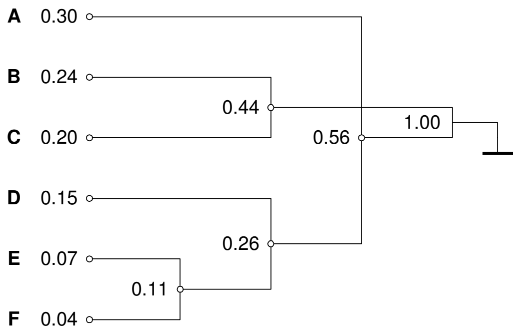
E[W]/L = 2.33/2 = 1.165.

d) Der konstruierte Code ist nicht eindeutig., d.h. es existieren andere optimale Codes. (Es ist hingegen ein eindeutig decodierbarer Code).

Aufgabe 8

a) $H = -\sum P_i \cdot \log_2 (P_i) = 2.34 \text{Bit}$

b)



A	10
B	00
C	01
D	110
E	1110
F	1111

$$E[W] = 1.00 + 0.56 + 0.44 + 0.26 + 0.11 = 2.37 \text{Bit / Symbol}$$

c) Kanalkapazität: $R \leq C = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_{\text{Signal}}}{P_{\text{Rauschen}}}\right) = 30'898 \text{Bit / s}$

Symbolrate: $r = \frac{R}{E[W]} \leq \frac{C}{E[W]} = \frac{30'898 \text{Bit / s}}{2.37 \text{Bit / Symbol}} = 13'037 \text{Symbole / s}$

d) Codierungstheorem: $H \leq \frac{E[W]}{L} < H + \frac{1}{L}$

$$\Rightarrow 2.34 \leq \underbrace{\frac{E[W]}{L}}_{\substack{\text{Mittlere Codewortlänge} \\ \text{pro Symbol}}} < 2.34 + \frac{1}{3} = 2.67$$

e) Nicht bandbegrenzter AWGN-Kanal: $C = \log_2(e) \cdot \frac{P_{\text{Signal}}}{\eta}$

Sehr viele Symbole in ein Codewort: E[W] = H

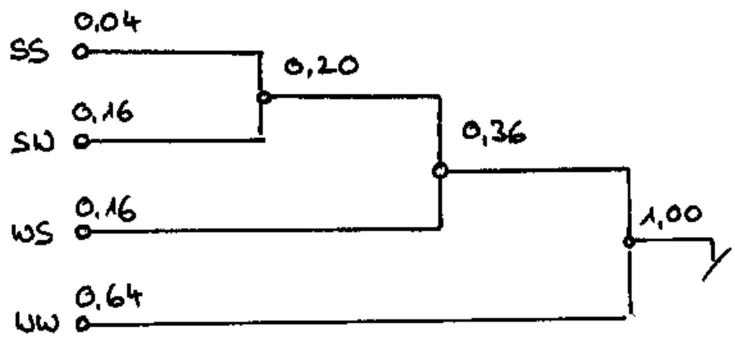
$$\Rightarrow \quad R = H \cdot r \leq C = \log_2(e) \cdot \frac{P_{\text{Signal}}}{\eta}$$

$$P_{\text{Signal}} \geq \frac{H \cdot r \cdot \eta}{\log_2(e)} = 973 \text{mW}$$

Aufgabe 9

a)

u_i	$P(u_i)$	z_i
SS	0,04	111
SW	0,16	110
WS	0,16	10
WW	0,64	0



b) $\underline{\underline{E[W] = 1,56}}$

Aufgabe 10

a) $$\frac{P_s}{P_n} = \frac{P_s}{\eta \cdot B} = 10^4 \mathrel{\hat{=}} 40\,\text{dB}$$

$$\Rightarrow P_s = 10^4 \cdot \eta \cdot B = \underline{\underline{93\,\text{mW}}}$$

b) $$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_s}{P_n}\right) = \underline{\underline{41{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{bits}}{\text{s}}}}$$

c) Durchschnittliche Codewortlänge: $E[W] < H + 1$

$$\Rightarrow \quad r \cdot E[W] \leq C$$

$$r \leq \frac{C}{E[W]} < \frac{C}{H+1} = \underline{\underline{14{,}9 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Symb.}}{\text{s}}}}$$

d) Codierung von mehreren Symbolen in ein Codewort: $\Rightarrow \quad E[W] \approx H$

$$\Rightarrow \quad r < \frac{C}{E[W]} = \underline{\underline{23{,}4 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Symb.}}{\text{s}}}}$$

e) $$C = B' \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_s}{\eta \cdot B'}\right) = \underline{\underline{76 \cdot 10^3 \ \frac{\text{bits}}{\text{s}}}}$$

Aufgabe 11

	Wahr	Falsch
Über einen Kanal mit der Bandbreite 3.4 kHz können grundsätzlich maximal 6.8 kbits/s übertragen werden.	❑	☑
Über einen verrauschten Kanal mit unendlicher Bandbreite können beliebig viele bits/s übertragen werden.	❑	☑
Über einen rauschfreien Kanal mit endlicher Bandbreite können beliebig viele bits/s übertragen werden.	☑	❑

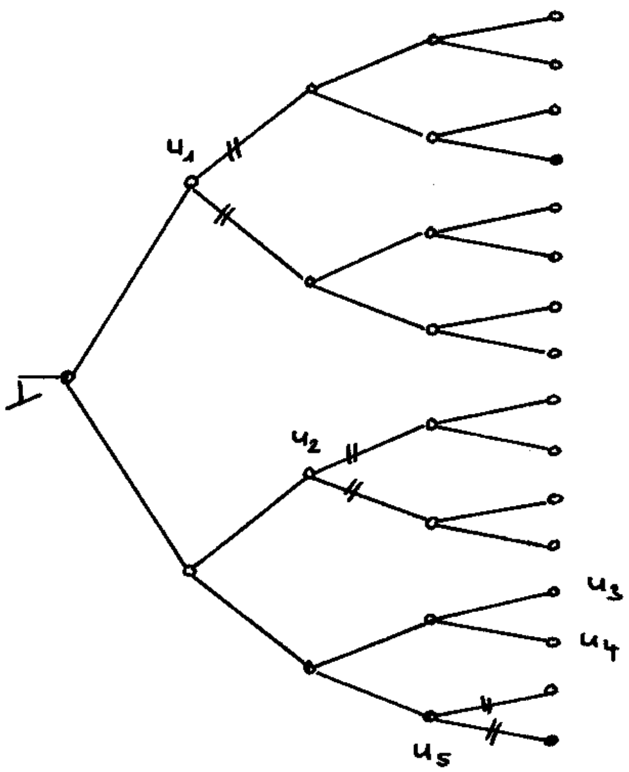
Aufgabe 12

a) Kraft'sche Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{-w_i} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad w_5 \geq -\log_2\left(1 - \sum_{i=1}^{4} 2^{-w_i}\right) = \underline{\underline{3}}$$

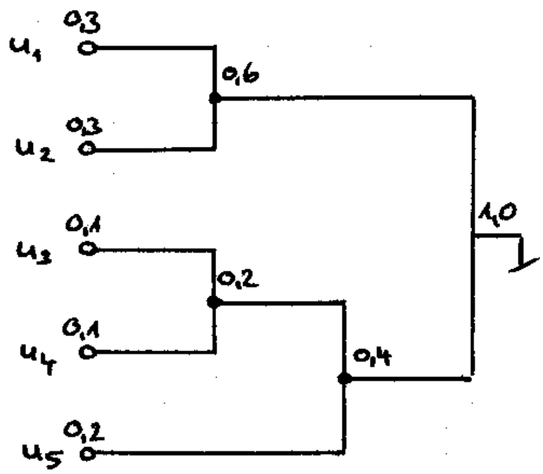
b)



u	z
u_1	1
u_2	01
u_3	0011
u_4	0010
u_5	000

c) $E[W] = \sum_{i=1}^{5} P(u_i)\cdot w_i = \underline{\underline{2{,}3}}$

d)



$E[W] = \underline{\underline{2{,}2}}$

e) $H(U) = -\sum P(u_i)\cdot \log_2\left(P(u_i)\right)$

$= \underline{\underline{2{,}171}}$

Verbesserung um ca. 1,3% möglich.

Mehrere Symbole zusammenfassen und gleichzeitig codieren.

Aufgabe 13

(i) Möglicher Huffman-Code

(ii) Kein Huffman-Code, die beiden längsten Codeworte weisen nicht die gleiche Länge auf.

(iii) Kein Huffman-Code, die beiden längsten Codeworte unterscheiden sich nicht nur im letzten Bit.

Aufgabe 14

a)

u_i	A	B	C	D	E
w_i	1	3	3	3	5

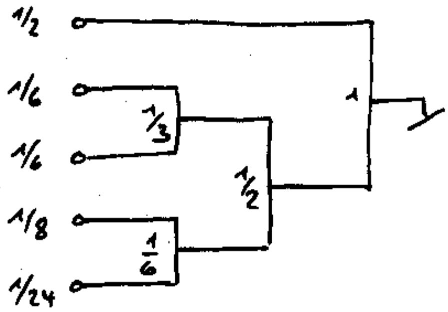
Kraft'sche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{-w_i} = 0{,}906 \leq 1$$

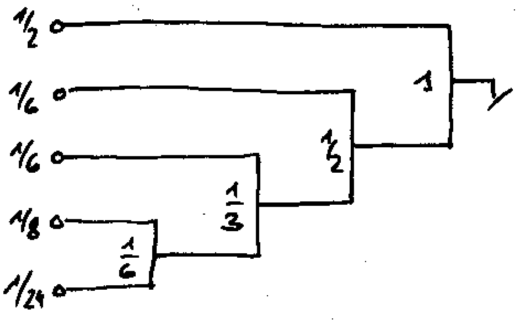
Ungleichung erfüllt ⇒ Code existiert.

b) $E[W] = \sum_{i=1}^{5} P(u_i) \cdot w_i = \underline{\underline{2{,}083 \text{ Bit/Symbol}}}$

c)



u_i	z_i	w_i
A	1	1
B	011	3
C	010	3
D	001	3
E	000	3

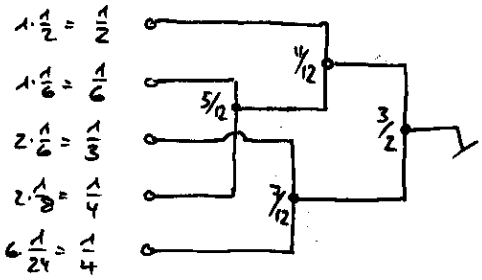


u_i	z_i	w_i
A	1	1
B	01	2
C	001	3
D	0001	4
E	0000	4

d) $\underline{E[W] = 2\ \text{Bit/Symbol}}$ (für beide Codes)

e) Falsch: Für das Symbol "D" nicht zutreffend.

f)



u_i	z_i
A	11
B	101
C	01
D	100
E	00

$E[C \cdot W] = \underline{3{,}417}$

Aufgabe 15

a)

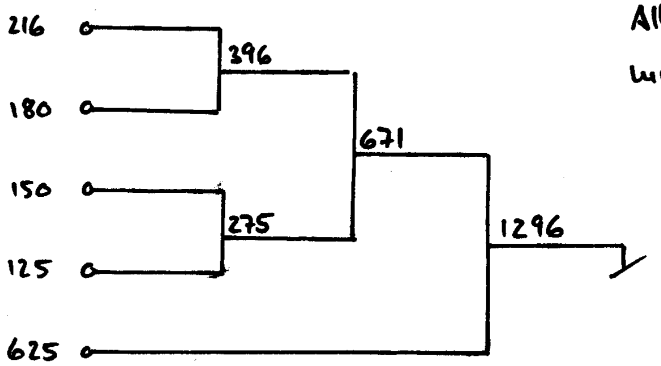
U	$P(u_i)$		
u_1	$\frac{1}{6}$	=	$\frac{216}{1296}$
u_2	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	=	$\frac{180}{1296}$
u_3	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$	=	$\frac{150}{1296}$
u_4	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$	=	$\frac{125}{1296}$
u_5	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	=	$\frac{625}{1296}$

b)

$$H = -\sum_{i=1}^{5} P(u_i) \cdot \log_2 \left(P(u_i)\right)$$

$$= \underline{\underline{2{,}019 \text{ bit}}}$$

c)



Alle WSK mit 1296 multipliziert.

U	Z
u_1	111
u_2	110
u_3	101
u_4	100
u_5	0

d) $$E[W] = \frac{396 + 275 + 671 + 1296}{1296} = \underline{\underline{2{,}035}}$$

e) $$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) \geq R \cdot E[W]$$

$$\Rightarrow \frac{P_S}{P_N} \geq 2^{\frac{R \cdot E[W]}{B}} - 1 = 93{,}65$$

$$\hat{=} \; \underline{\underline{19{,}72\ \mathrm{dB}}}$$

f) Durch Codierung mehrerer Ereignisse in jeweils ein Codewort.

$$\Rightarrow \frac{E[W]}{L} \longrightarrow H$$

$$\Rightarrow \frac{P_S}{P_N} \geq 2^{\frac{R \cdot H}{B}} - 1 = 90{,}32$$

$$\hat{=} \; \underline{\underline{19{,}56\ \mathrm{dB}}}$$

$$\Delta = \underline{\underline{0{,}157\ \mathrm{dB}}}$$

g) $$P(u_i) = \underline{\underline{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}}}$$

h)

$$H = -\sum_{i=1}^{\infty} P(u_i)\cdot \log_2\left(P(u_i)\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\cdot \log_2\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\cdot\left(\log_2\left(\frac{1}{6}\right)+(i-1)\cdot\log_2\left(\frac{5}{6}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\log_2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} - \frac{1}{6}\cdot\log_2\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

$$= -\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 6 - \frac{1}{6}\cdot\log_2\left(\frac{5}{6}\right)\cdot 30$$

$$= -\log_2\left(\frac{1}{6}\right) - 5\cdot\log_2\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \log_2(6) + 5\cdot\log_2(6) - 5\cdot\log_2(5)$$

$$= 6\cdot\log_2(6) - 5\cdot\log_2(5)$$

$$= \underline{\underline{3.900}}$$

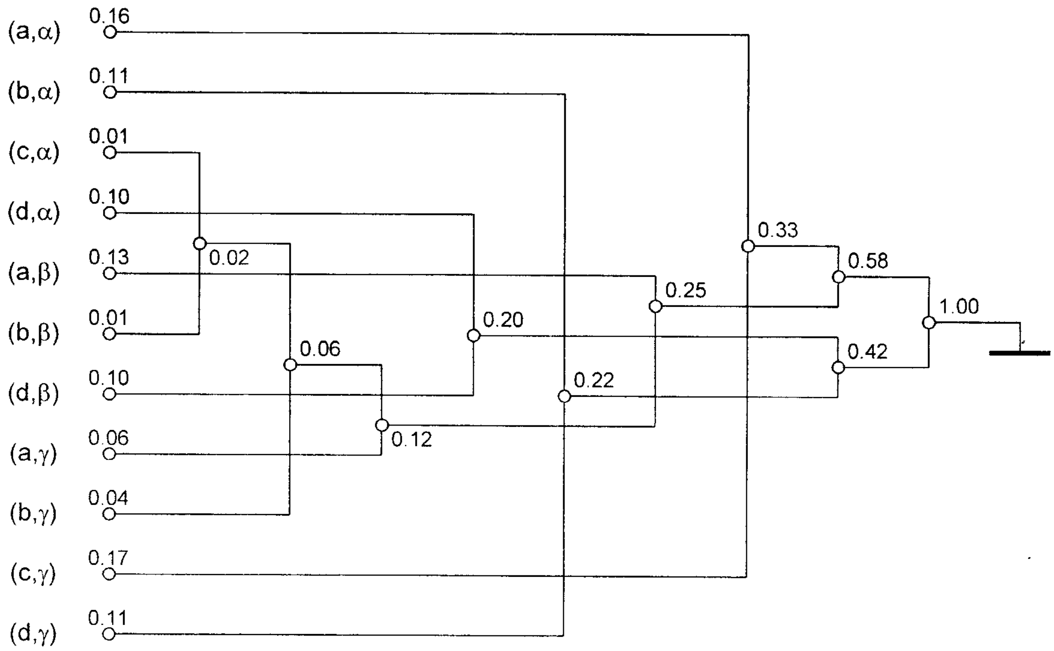
Aufgabe 16

a)

$$H(X,Y) = -\sum_{x,y} P(x,y) \cdot \log_2\left(P(x,y)\right)$$

$$= \underline{\underline{3{,}167 \text{ bit}}}$$

b)



$$E[W] = \underline{\underline{3{,}2}}$$

c)

$$P(Y=\alpha) = \sum_{x} P(X=x, Y=\alpha) = \underline{\underline{0{,}38}}$$

$$P(Y=\beta) = \underline{\underline{0{,}24}}$$

$$P(Y=\gamma) = \underline{\underline{0{,}38}}$$

d)

$$H(Y) = -\sum_y P(Y=y) \cdot \log_2 P(Y=y)$$

$$= \underline{\underline{1{,}555 \text{ bit}}}$$

e)

$$P(X=a \mid Y=\alpha) = \frac{P(X=a, Y=\alpha)}{P(Y=\alpha)}$$

$$= \underline{\underline{0{,}421}}$$

$$P(X=b \mid Y=\alpha) = \underline{\underline{0{,}290}}$$

$$P(X=c \mid Y=\alpha) = \underline{\underline{0{,}026}}$$

$$P(X=d \mid Y=\alpha) = \underline{\underline{0{,}263}}$$

f)

$$H(X \mid Y=\alpha) = -\sum_x P(X=x \mid Y=\alpha) \cdot \log_2(\ldots)$$

$$= \underline{\underline{1{,}687 \text{ bit}}}$$

g)

$$H(X \mid Y=\beta) = \underline{\underline{1{,}196 \text{ bit}}}$$

$$H(X \mid Y=\gamma) = \underline{\underline{1{,}799 \text{ bit}}}$$

h)

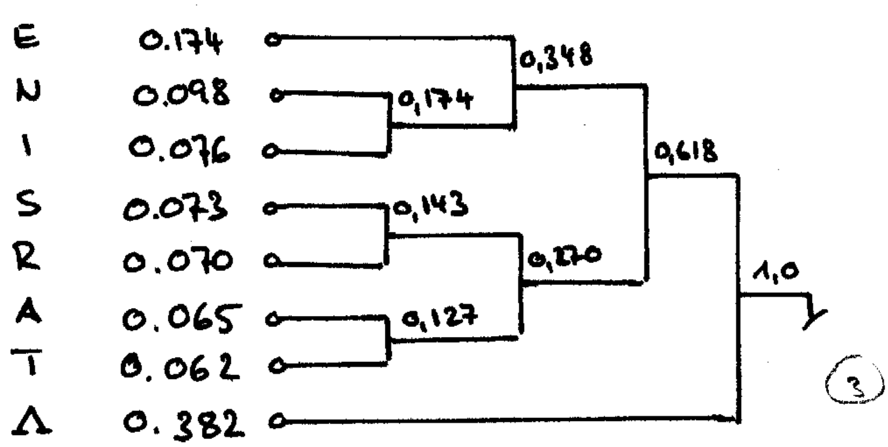
$$H(X \mid Y) = \underline{\underline{1.612 \text{ bit}}}$$

Aufgabe 17

a) $P(\Lambda) = \underline{\underline{0,382}}$ 1

b) $H = -\sum_{i=1}^{8} P(u_i) \log_2\left(P(u_i)\right) = \underline{\underline{2,63 \text{ Bit}}}$ 1

c)



u_i	z_i
E	111
N	1101
I	1100
S	1011
R	1010
A	1001
T	1000
Λ	0

1

d) $E[W] = \underline{\underline{2,68}}$ 1

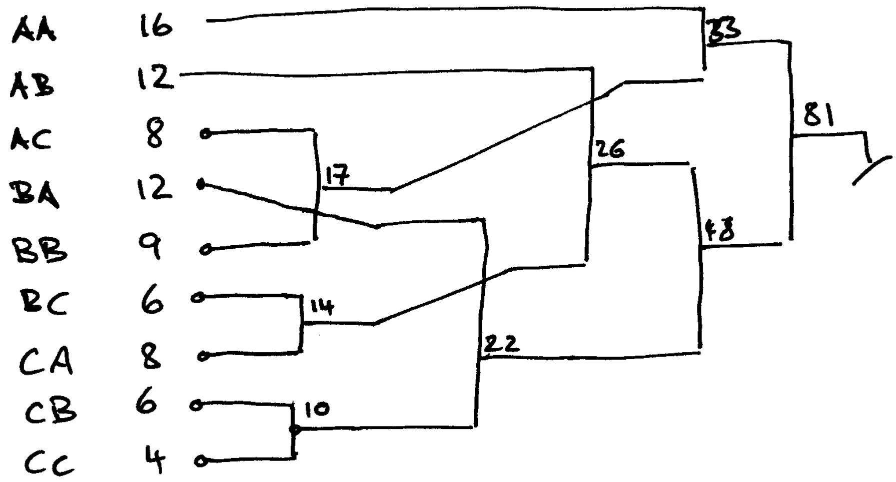
Aufgabe 18

a)

$$H = -\sum_{i=1}^{3} P(u_i)\,\log_2\left(P(u_i)\right)$$

$$= 1{,}53 \text{ bit}$$

b)



c)

$$E[W]/L = \frac{251}{2 \cdot 81} = 1{,}549$$

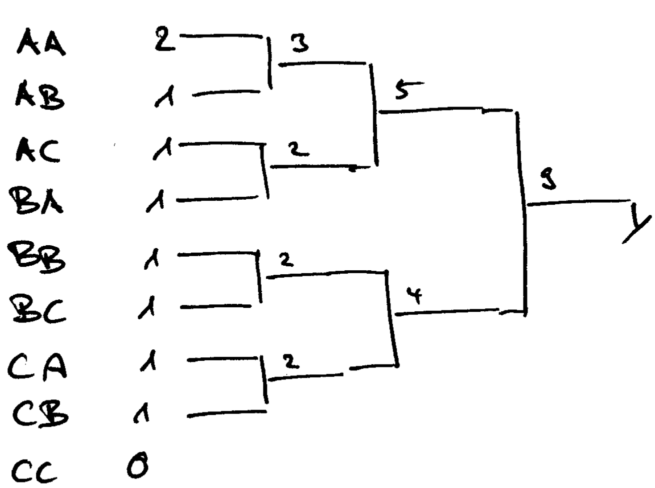
d)

AA	$4/9 \cdot 1/2$	=	$2/9$
AB	$4/9 \cdot 1/4$	=	$1/9$
AC	$4/9 \cdot 1/4$	=	$1/9$
BA	$3/9 \cdot 1/3$	=	$1/9$
BB	$3/9 \cdot 1/3$	=	$1/9$
BC	$3/9 \cdot 1/3$	=	$1/9$
CA	$2/9 \cdot 1/2$	=	$1/9$
CB	$2/9 \cdot 1/2$	=	$1/9$
CC	$2/9 \cdot 0$	=	0

e)

$$H(X_n, X_{n-1}) = 2{,}948$$

f)



g) $E[W] = 3 \Rightarrow \frac{E[W]}{L} = 1{,}5$

h) $H(X_n \mid X_{n-1} = A) = 1{,}5$ Bit

i) $H(X_n \mid X_{n-1} = B) = 1{,}585$ Bit

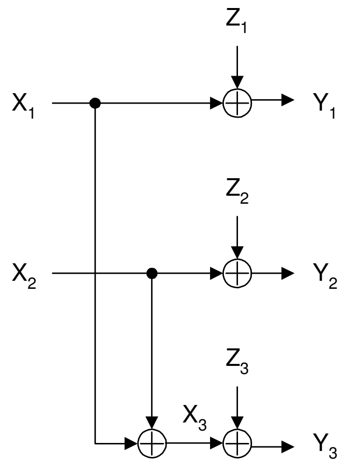
j) $H(X_n \mid X_{n-1} = C) = 1$ Bit

k) $H(X_n \mid X_{n-1}) = \sum_{i=1}^{3} P(u_i) \cdot H(X_n \mid X_{n-1} = u_i)$

$= 1{,}417$ Bit

Aufgabe 19

X_1 und X_2 sind voneinander unabhängige, binäre Zufallswerte, welche die Werte 0 und 1 mit der Wahrscheinlichkeit ½ annehmen.



Z_1, Z_2 und Z_3 sind voneinander unabhängige, binäre Zufallswerte, welche den Wert 1 mit der Wahrscheinlichkeit p annehmen.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Ereignisse an.

Ereignis	**Wahrscheinlichkeit**
$Y_1 = 0$	½
$Y_1 = 1$	½
$(X_1, X_2) = (0, 0)$	¼
$(X_1, X_2) = (0, 1)$	¼
$(X_1, X_2) = (1, 0)$	¼
$(X_1, X_2) = (1, 1)$	¼
$Y_3 = 0$	½
$Y_3 = 1$	½

b) Berechnen Sie die Entropien $H(Y_1)$, $H(Y_3)$, $H(X_1, X_2)$, $H(X_1, X_2, X_3)$ und $H(Y_1, Y_2)$.

$$H(Y_1) = 1 \text{ bit}$$
$$H(Y_3) = 1 \text{ bit}$$
$$H(X_1, X_2) = 2 \text{ bit}$$
$$H(X_1, X_2, X_3) = 2 \text{ bit}$$
$$H(Y_1, Y_2) = 2 \text{ bit}$$

c) Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y_1 | X_1)$. Geben Sie das Resultat in Funktion der binären Entropiefunktion h(p) an.

$$H(Y_1|X_1) = \Pr(X_1 = 0) \cdot H(Y_1|X_1 = 0) + \Pr(X_1 = 1) \cdot H(Y_1|X_1 = 1)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot h(p) + \frac{1}{2} \cdot h(p) = h(p) = -p \cdot \log_2(p) - (1-p) \cdot \log_2(1-p)$$

d) Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y_1, Y_2 | X_1, X_2)$. Geben Sie das Resultat in Funktion der binären Entropiefunktion h(p) an.

$$H(Y_1, Y_2 | X_1, X_2) = H(Y_1|X_1) + H(Y_2|X_2) = 2 \cdot h(p)$$

e) Berechnen Sie die Transinformation $I(X_1,X_2;Y_1,Y_2)$.

$$I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) = H(X_1, X_2) - H(X_1, X_2 | Y_1, Y_2) = 2 \cdot (1 - h(p))$$

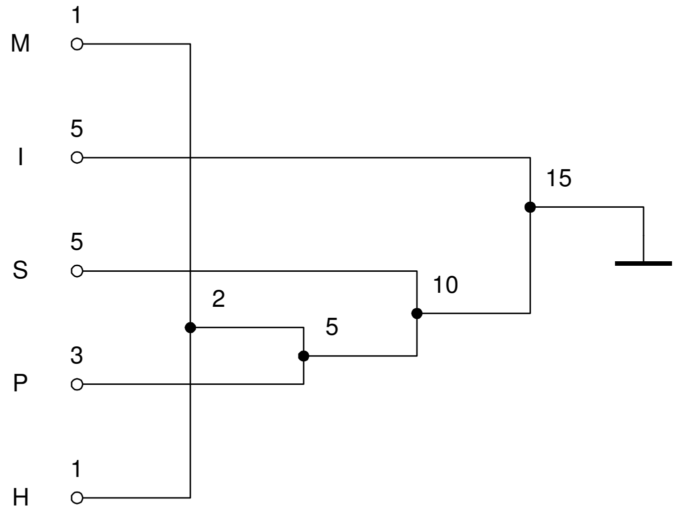
Aufgabe 20

Am Ausgang einer Informationsquelle wird das Wort „MISSISSIPPISHIP“ beobachtet. Wir gehen davon aus, dass diese Beobachtung für die Quelle typisch ist, d.h. die relative Häufigkeit der Buchstaben entspricht der Wahrscheinlichkeit.

a) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit (eigentlich relativer Häufigkeit) jeder Buchstabe auftritt.

Buchstabe	M	I	S	P	H
Häufigkeit	1	5	5	3	1
Wahrscheinlichkeit	1/15	1/3	1/3	1/5	1/15

b) Konstruieren Sie einen binären, präfixfreien Code, mit dem das Wort „MISSISSIPPISHIP“ möglichst effizient codiert werden kann.



M	0011
I	1
S	01
P	000
H	0010

c) Wie viele binäre Ziffern werden im Durchschnitt gebraucht, um einen Buchstaben der Quelle zu codieren?

$$E[W] = \frac{32}{15} = 2.133$$

d) Wie gross ist die Entropie der Quelle?

$$H = -\sum_{i=1}^{5} P(u_i) \cdot \log_2\left(P(u_i)\right) = 2.042$$

Aufgabe 21

a) $P(X=0) = 5/6$

$P(X=1) = 1/6$

b) $H(X) = 5/6 \cdot \log_2(6/5) + 1/6 \cdot \log_2(6)$

$= \underline{\underline{0{,}650}}$

c) $P(Y=0 \mid X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8}$

$P(Y=1 \mid X=0) = \binom{k}{1}\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{3}{8}$

$P(Y=2 \mid X=0) = \binom{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{3}{8}$

$P(Y=3 \mid X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$$P(Y=y \mid X=1) = \begin{cases} 1, & y=3 \\ 0, & y \neq 3 \end{cases}$$

d) $P(Y=3) = P(X=0) \cdot P(Y=3 \mid X=0) + P(X=1) \cdot P(Y=3 \mid X=1)$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot 1$

$= \underline{\underline{\frac{13}{48}}}$

$$P(X=0 \mid Y=3) = \frac{P(X=0) \cdot P(Y=3 \mid X=0)}{P(Y=3)}$$

$$= \frac{5/6 \cdot 1/8}{13/48} = \underline{\underline{\frac{5}{13}}}$$

e) $y = 0, 1, 2 \quad \Rightarrow \quad H(X \mid Y=y) = 0$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad H(X \mid Y=3) = \frac{5}{13} \cdot \log_2\left(\frac{13}{5}\right) + \frac{8}{13} \log_2\left(\frac{13}{8}\right)$

$= 0{,}961$

$H(X \mid Y) = \sum_y P(Y=y) \cdot H(X \mid Y=y)$

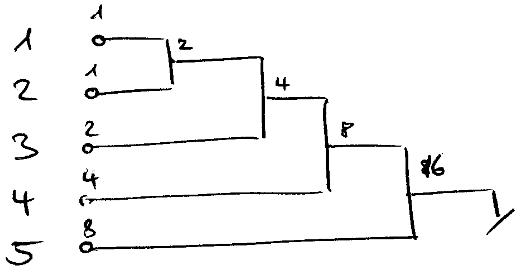
$= P(Y=3) \cdot H(X \mid Y=3) = \frac{13}{48} \cdot 0{,}961$

$= 0{,}260$

f) $I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = \underline{\underline{0{,}390}}$

Aufgabe 22

a)



Alle WSK mit 16 multipliziert.

u_i	z_i
1	0000
2	0001
3	001
4	01
5	1

b) $E[W] = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} = 1{,}875$

c) $P(\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi)\, d\varphi$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\varphi_2 - \varphi_1 + \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\right)$$

$P\left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{8}\right) = 0{,}1234$

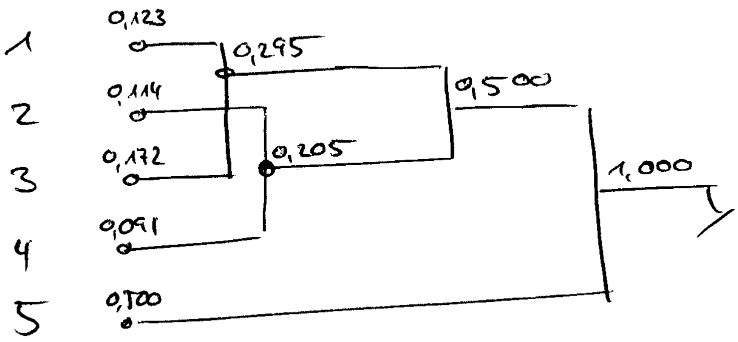
$P\left(\frac{\pi}{8} < \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}1141$

$P\left(\frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1716$

$P\left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi\right) = 0{,}0908$

$P\left(\pi < \varphi \leq 2\pi\right) = 0{,}5000$

d)



u_i	z_i
1	000
2	010
3	001
4	011
5	1

e)

$$\frac{E[W]}{L} < H(U) + 1/L$$

$$E[W] < L \cdot H(U) + 1 = 1000 \cdot 1{,}980 + 1$$

$$= 1981$$

Aufgabe 23

a)
$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \log(p_i) = N \cdot \frac{1}{N} \cdot \log(N)$$

$$= 10{,}97 \text{ bit}$$

$\Rightarrow \quad E[W] \geq 10{,}97$

$\Rightarrow \quad E[W] < 10{,}5$ nicht realisierbar.

b) Kraft'sche Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{N} 2^{-w_i} = 42 \cdot 2^{-10} + 1964 \cdot 2^{-11}$$

$$= \frac{84 + 1964}{2^{11}} = 1.0$$

$\Rightarrow$ Code existiert.

Aufgabe 24

a) Tonhöhe: $H_h = -\sum_{i=1}^{7} p_i \cdot \log_2(p_i)$

$$= \underline{\underline{2{,}554 \text{ bit}}}$$

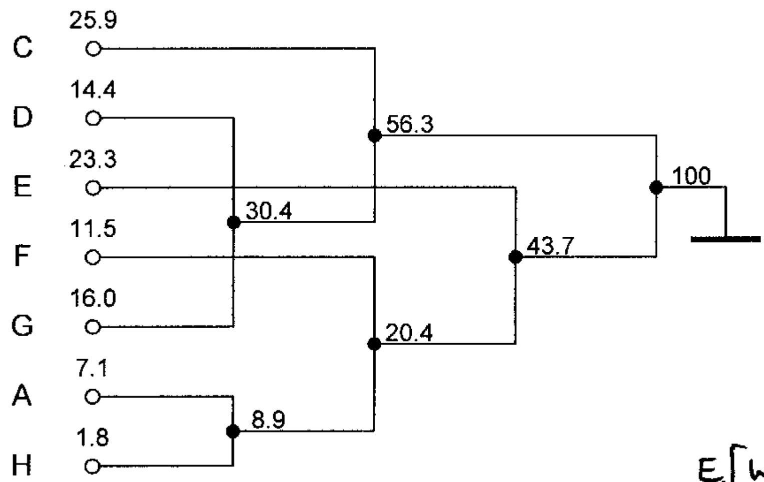
Tondauer: $H_d = -\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot \log_2(p_i)$

$$= \underline{\underline{1{,}739 \text{ bit}}}$$

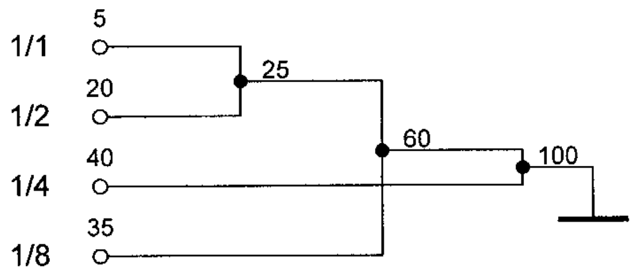
Note: $H_N = H_h + H_d = \underline{\underline{4{,}294 \text{ bit}}}$

(da Tonhöhe und -dauer voneinander unabhängig)

b)



$E_1[W] = 2{,}597$



$E_2[W] = 1{,}85$

$E[W] = \underline{\underline{4{,}447}}$

c)

$$H \leq E[W] < H+1$$

$$\underline{\underline{4{,}294 \leq E[W] < 5{,}294}}$$

Kurzfragen

1.

a) Die Entropie hängt von den Auftretenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Symbole ab.
b) Die Entropie ist genau dann Null, falls eines der Symbole mit der Wahrscheinlichkeit 1 auftritt. (Alle anderen Symbole haben dann die Wahrscheinlichkeit 0).
c) Die Entropie ist maximal, falls alle Symbole die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit besitzen.
d) Die Entropie ist ein Mass für die Ungewissheit über das Ergebnis eines Zufallsexperiments. Information ist die Verringerung von Ungewissheit, d.h. sie entspricht der Differenz der Entropie vor und nach Erhalt einer Nachricht.

2.

a) Codes 1, 3, und 4 sind präfixfrei. Beim Code 2 ist 110 ein Präfix von 1101.
b) Die Codes 1 und 3 besitzen mit E[W] = 2.5 die kürzesten durchschnittlichen Codewortlängen.

3. Ein Quellencoder nutzt Gesetzmässigkeiten (Strukturen, Regelmässigkeiten) des Signals aus, um die Daten zu komprimieren. Eine brauchbare Verschlüsselung bezweckt jedoch gerade das „Verstecken“ solcher Gesetzmässigkeiten.