Lösungen Kanalcodierung

Aufgabe 1

a) $N = 2^k - 1 = \underline{\underline{31}}$

b) $n = N - k = 26 \Rightarrow 2^{26} = \underline{\underline{67'108'864}}$

c)

x_1	+	+	+	+	+
x_2	0	+	+	+	+
x_3	+	0	+	+	+
x_4	+	+	0	+	+
x_5	+	+	+	0	+
x_6	+	+	+	+	0
x_7	0	0	+	+	+
x_8	0	+	0	+	+
x_9	0	+	+	0	+
x_{10}	0	+	+	+	0
x_{11}	+	0	0	+	+
x_{12}	+	0	+	0	+
x_{13}	+	0	+	+	0
x_{14}	+	+	0	0	+
x_{15}	+	+	0	+	0
x_{16}	+	+	+	0	0
x_{17}	0	0	0	+	+
x_{18}	0	0	+	0	+
x_{19}	0	0	+	+	0
x_{20}	0	+	0	0	+
x_{21}	0	+	0	+	0
x_{22}	0	+	+	0	0
x_{23}	+	0	0	0	+
x_{24}	+	0	0	+	0
x_{25}	+	0	+	0	0
x_{26}	+	+	0	0	0
	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}

$$x_{27} = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14} \oplus x_{15} \oplus x_{16} \oplus x_{23} \oplus x_{24} \oplus x_{25} \oplus x_{26}$$

$$x_{28} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{14} \oplus x_{15} \oplus x_{16} \oplus x_{20} \oplus x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{26}$$

$$x_{29} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{16} \oplus x_{18} \oplus x_{19} \oplus x_{22} \oplus x_{25}$$

$$x_{30} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{13} \oplus x_{15} \oplus x_{17} \oplus x_{19} \oplus x_{21} \oplus x_{24}$$

$$x_{31} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{14} \oplus x_{17} \oplus x_{18} \oplus x_{20} \oplus x_{23}$$

d) $f_k = 1$ (wie alle Hamming-Codes)

e) $P_{Rest} = 1 - (1-P_b)^n - n \cdot P_b (1-P_b)^{n-1}$

$= \underline{\underline{38{,}39 \cdot 10^{-3}}}$

f) Berechnung des Syndroms:

$s_1 = 0$
$s_2 = 0$
$s_3 = 1$
$s_4 = 0$
$s_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{29}$ ist fehlerhaft.

P.S.: Diese Lösung ist nicht eindeutig, sondern hängt davon ab, wie die Codebits x_i auf die Prüfgleichungen verteilt wurden.

Aufgabe 2

Hamming-Code $\Rightarrow$ $f_k = 1$

$N = 2^k - 1$

$$\Rightarrow \log_2\left[\sum_{i=0}^{f_k}\binom{N}{i}\right] = \log_2(1 + N)$$

$$= \log_2(1 + 2^k - 1)$$

$$= \log_2(2^k) = \underline{\underline{k}}$$

Aufgabe 3

a) Alle Codewörter können mit der Vorschrift

$$v = u \cdot G$$

berechnet werden:

u	v
(0 0 0)	(0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 1)	(1 1 1 0 1 0 0)
(0 1 0)	(1 0 1 0 0 1 1)
(0 1 1)	(0 1 0 0 1 1 1)
(1 0 0)	(1 1 0 1 0 0 1)
(1 0 1)	(0 0 1 1 1 0 1)
(1 1 0)	(0 1 1 1 0 1 0)
(1 1 1)	(1 0 0 1 1 1 0)

b) Die Generatormatrix G' des separierbaren Codes hat die Form

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

Dabei ist P eine 3x4 Matrix mit binären Einträgen.
Die Matrix G' entsteht aus der Matrix G, indem jeweils zwei oder mehr Zeilen von G addiert werden und so die Zeilen von G' bilden.

- Addition aller drei Zeilen: (1 0 0 1 1 1 0)
- Addition der Zeilen 2 und 3: (0 1 0 0 1 1 1)
- Addition der Zeilen 1 und 3: (0 0 1 1 1 0 1)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

c) $w_{min}(C) = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d_{min}(C) = 4}}$

$\Rightarrow \quad f_K = 1$

d)

$x_4 = x_1 \oplus x_3$

$x_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

$x_6 = x_1 \oplus x_2$

$x_7 = x_2 \oplus x_3$

$s_1 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4$

$s_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5$

$s_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_6$

$s_4 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_7$

e) Einzelfehler:

e	s
(1 0 0 0 0 0 0)	(1 1 1 0)
(0 1 0 0 0 0 0)	(0 1 1 1)
(0 0 1 0 0 0 0)	(1 1 0 1)
(0 0 0 1 0 0 0)	(1 0 0 0)
(0 0 0 0 1 0 0)	(0 1 0 0)
(0 0 0 0 0 1 0)	(0 0 1 0)
(0 0 0 0 0 0 1)	(0 0 0 1)

Büschelfehler der Länge 2:

e	s
(1 1 0 0 0 0 0)	(1 0 0 1)
(0 1 1 0 0 0 0)	(1 0 1 0)
(0 0 1 1 0 0 0)	(0 1 0 1)
(0 0 0 1 1 0 0)	(1 1 0 0)
(0 0 0 0 1 1 0)	(0 1 1 0)
(0 0 0 0 0 1 1)	(0 0 1 1)
(1 0 0 0 0 0 1)	(1 1 1 1)

⇒ Die Syndrome sind alle verschieden

⇒ Fehler können korrigiert werden.

Aufgabe 4

a) Die Generatormatrix ist in systematischer Form:

$$G = [\, I_3 \mid P \,]$$

Daraus folgt für die Prüfmatrix

$$H = [\, P^T \mid I_4 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $s = e \cdot H^T \Rightarrow$

$$s_1 = e_1 \oplus e_3 \oplus e_4$$
$$s_2 = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus e_5$$
$$s_3 = e_1 \oplus e_2 \oplus e_6$$
$$s_4 = e_2 \oplus e_3 \oplus e_7$$

e	s
(1000000)	(1 1 1 0)
(0100000)	(0 1 1 1)
(0010000)	(1 1 0 1)
(0001000)	(1 0 0 0)
(0000100)	(0 1 0 0)
(0000010)	(0 0 1 0)
(0000001)	(0 0 0 1)
(1100000)	(1 0 0 1)
(0110000)	(1 0 1 0)
(0011000)	(0 1 0 1)
(0001100)	(1 1 0 0)
(0000110)	(0 1 1 0)
(0000011)	(0 0 1 1)
(1000001)	(1 1 1 1)

c) $s = r \cdot H^T$

$r_1 = (0\,0\,0\,1\,1\,0\,1) \Rightarrow s_1 = (1\,1\,0\,1)$

$\Rightarrow e_1 = (0\,0\,1\,0\,0\,0\,0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{c}_1 = (0\,0\,1\,1\,1\,0\,1)}}$

$r_2 = (0\,0\,1\,0\,1\,0\,0) \Rightarrow s_2 = (1\,0\,0\,1)$

$\Rightarrow e_2 = (1\,1\,0\,0\,0\,0\,0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{c}_2 = (1\,1\,1\,0\,1\,0\,0)}}$

$r_3 = (1\,1\,1\,1\,1\,1\,0) \Rightarrow s_3 = (1\,0\,1\,0)$

$\Rightarrow e_3 = (0\,1\,1\,0\,0\,0\,0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{c}_3 = (1\,0\,0\,1\,1\,1\,0)}}$

Aufgabe 5

a) $$\underline{\underline{n = 1 + m + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{r}}}$$

b) $$k = N - n = 2^m - \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$$

Da $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$ $\Rightarrow$
$$k = \sum_{i=r+1}^{m} \binom{m}{i} = \sum_{j=0}^{m-r-1} \binom{m}{j+r+1} = \sum_{j=0}^{m-r-1} \binom{m}{m-j-r-1} = \underline{\underline{\sum_{\ell=0}^{m-r-1} \binom{m}{\ell}}}$$

c) $$G_0 = (1111111111111111)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0000000011111111 \\ 0000111100001111 \\ 0011001100110011 \\ 0101010101010101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} v_1 v_2 \\ v_1 v_3 \\ v_1 v_4 \\ v_2 v_3 \\ v_2 v_4 \\ v_3 v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0000000000001111 \\ 0000000000110011 \\ 0000000001010101 \\ 0000001100000011 \\ 0000010100000101 \\ 0001000100010001 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

d) $d_{min}(C) = 2^{m-r} = 2^{4-2} = 4$

korrigieren: $f_k = 1$

erkennen: $f_e = 3$

e) Aus $m = r$ folgt: $d_{min}(C) = 2^{m-r} = 1$

$\Rightarrow$ Minimale Hamming-Distanz ist nur $d_{min} = 1$.

(Anzahl Prüfbits ist gleich Null).

Aufgabe 6

a) $v(x) = v_1 x^4 + v_2 x^3 + v_3 x^2 + v_4 x + v_5$

b) $v^{(3)} = (v_4 \quad v_5 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3)$

c) $v^{(3)}(x) = v_4 x^4 + v_5 x^3 + v_1 x^2 + v_2 x + v_3$

d) $x^3 \cdot v(x) = v_1 x^7 + v_2 x^6 + v_3 x^5 + v_4 x^4 + v_5 x^3$

$$(v_1 x^7 + v_2 x^6 + v_3 x^5 + v_4 x^4 + v_5 x^3) : (x^5 + 1) = \underbrace{v_1 x^2 + v_2 x + v_3}_{\text{Quotient}} = q(x)$$

$$\begin{array}{l}
\underline{v_1 x^7 + v_1 x^2} \\
\quad v_2 x^6 + v_3 x^5 + v_4 x^4 + v_5 x^3 + v_1 x^2 \\
\quad \underline{v_2 x^6 + v_2 x} \\
\quad\quad v_3 x^5 + v_4 x^4 + v_5 x^3 + v_1 x^2 + v_2 x \\
\quad\quad \underline{v_3 x^5 + v_3} \\
\quad\quad\quad \underbrace{v_4 x^4 + v_5 x^3 + v_1 x^2 + v_2 x + v_3}_{\text{Rest}} = r(x)
\end{array}$$

e) $r(x) = v^{(3)}(x)$

Die Division von $x^3 \cdot v(x)$ durch x^5+1 liefert als Rest das Polynom $v^{(3)}(x)$.

Aufgabe 7

a) • $u_1(x) = x^3$

Berechnung von $b(x)$:

$$x^3 \cdot u_1(x) : g(x) = x^6 : (x^3+x+1) = x^3 + x + 1$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^6+x^4+x^3} \\ x^4+x^3 \\ \underline{x^4+x^2+x} \\ x^3+x^2+x \\ \underline{x^3+x+1} \\ x^2+1 = b(x) \end{array}$$

$$c_1(x) = x^3 \cdot u_1(x) + b(x) = x^6 + x^2 + 1 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{(1000101)}}$$

• $u_2(x) = x^2$:

$$x^5 : (x^3+x+1) = x^2 + 1$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^5+x^3+x^2} \\ x^3+x^2 \\ \underline{x^3+x+1} \\ x^2+x+1 = b(x) \mathrel{\hat{=}} (1\,1\,1) \end{array}$$

$$\Rightarrow c_2 = \underline{\underline{(0\,1\,0\,0\,1\,1\,1)}}$$

• $u_3(x) = x$:

$$x^4 : (x^3+x+1) = x$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^4+x^2+x} \\ x^2+x = b(x) \mathrel{\hat{=}} (1\,1\,0) \end{array}$$

$$\Rightarrow c_3 = \underline{\underline{(0\,0\,1\,0\,1\,1\,0)}}$$

• $u_4(x) = 1$:

$$x^3 : (x^3+x+1) = 1$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^3+x+1} \\ x+1 = b(x) \mathrel{\hat{=}} (0\,1\,1) \end{array}$$

$$\Rightarrow c_4 = \underline{\underline{(0\,0\,0\,1\,0\,1\,1)}}$$

b)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

u	c
0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1 0 1 1
0 0 1 0	0 0 1 0 1 1 0
0 0 1 1	0 0 1 1 1 0 1
0 1 0 0	0 1 0 0 1 1 1
0 1 0 1	0 1 0 1 1 0 0
0 1 1 0	0 1 1 0 0 0 1
0 1 1 1	0 1 1 1 0 1 0
1 0 0 0	1 0 0 0 1 0 1
1 0 0 1	1 0 0 1 1 1 0
1 0 1 0	1 0 1 0 0 1 1
1 0 1 1	1 0 1 1 0 0 0
1 1 0 0	1 1 0 0 0 1 0
1 1 0 1	1 1 0 1 0 0 1
1 1 1 0	1 1 1 0 1 0 0
1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1

Aufgabe 8

a) $r_1(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$

$$r_1(x) : g(x) = (x^6+x^5+x^3+1):(x^4+x^3+x^2+1) = x^2+1$$
$$\underline{x^6+x^5+x^4+x^2}$$
$$x^4+x^3+x^2+1$$
$$\underline{x^4+x^3+x^2+1}$$
$$0$$

$r_1(x)$ ist ohne Rest durch $g(x)$ teilbar, also ist r_1 ein gültiges Codewort.

$r_2(x) = x^5+x^4+x^3+x+1$

$$r_2(x) : g(x) = (x^5+x^4+x^3+x+1):(x^4+x^3+x^2+1) = x$$
$$\underline{x^5+x^4+x^3+x}$$
$$1$$

$\Rightarrow$ r_2 ist kein gültiges Codewort.

b) $r = c+e = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)$

$r(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+1$

c) $$r(x):g(x) = (x^5+x^4+x^3+x^2+1):(x^4+x^3+x^2+1) = x$$
$$\underline{x^5+x^4+x^3+x}$$
$$x^2+x+1 = s(x)$$

d)

$$s(X) = R_{g(x)}\left[r(X)\right] = R_{g(x)}\left[c(X)\oplus e(X)\right]$$
$$= \underbrace{R_{g(x)}\left[c(X)\right]}_{=0} \oplus R_{g(x)}\left[e(X)\right] = R_{g(x)}\left[e(X)\right]$$

Aufgabe 9

a) $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$

b) $n = 7$, $k = 4$ $\Rightarrow$ $u = 3$

c) Wir berechnen die systematischen Codeworte für die Nachrichtenworte $u_1 = (1\,0\,0)$, $u_2 = (0\,1\,0)$ und $u_3 = (0\,0\,1)$:

$u_1(x) = x^2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l}
x^6 : (x^4+x^3+x^2+1) = x^2 + x \\
\underline{x^6+x^5+x^4+x^2} \\
\quad x^5+x^4+x^2 \\
\quad \underline{x^5+x^4+x^3+x} \\
\qquad x^3+x^2+x \; = b(x)
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad c_1 = (1\;0\;0\;1\;1\;1\;0)$

$u_2(x) = x \Rightarrow$

$$\begin{array}{l}
x^5 : (x^4+x^3+x^2+1) = x + 1 \\
\underline{x^5+x^4+x^3+x} \\
\quad x^4+x^3+x \\
\quad \underline{x^4+x^3+x^2+1} \\
\qquad x^2+x+1 \; = b(x)
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad c_2 = (0\;1\;0\;0\;1\;1\;1)$

$u_3(x) = 1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l}
x^4 : (x^4+x^3+x^2+1) = 1 \\
\underline{x^4+x^3+x^2+1} \\
\quad x^3+x^2+1 \; = b(x)
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad c_3 = (0\;0\;1\;1\;1\;0\;1)$

$$\Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

u	c
000	0000000
001	0011101
010	0100111
011	0111010
100	1001110
101	1010011
110	1101001
111	1110100

$$\Rightarrow \quad d_{min} = w_{min} = \underline{\underline{4}}$$

e) $d_{min} = 4 \quad \Rightarrow \quad f_k = 1$ (korrigieren)

$f_k = 3$ (erkennen)

f) $r_1(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$

$$r_1(x) : g(x) = (x^6 + x^5 + x^4 + x + 1) : (x^4 + x^3 + x^2 + 1) = x^2$$
$$\frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^2}{x^2 + x + 1 = s(x)}$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = \underline{\underline{(0\ 1\ 1\ 1)}}$$

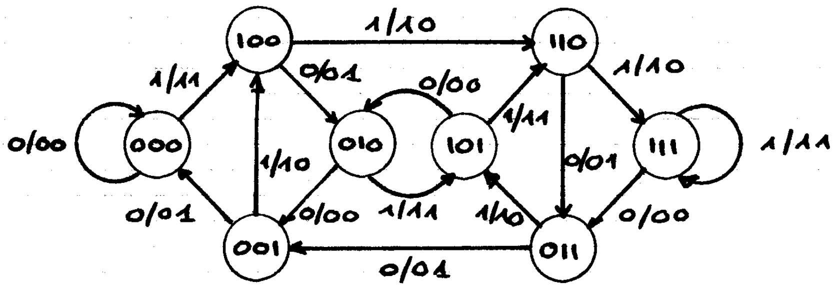
$$r_2(x) : g(x) = (x^6 + x^5 + x^2 + 1) : (x^4 + x^3 + x^2 + 1) = x^2 + 1$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^6 + x^5 + x^4 + x^2} \\ \qquad x^4 + 1 \\ \qquad \underline{x^4 + x^3 + x^2 + 1} \\ \qquad\quad x^3 + x^2 \quad = s_2(x) \end{array}$$

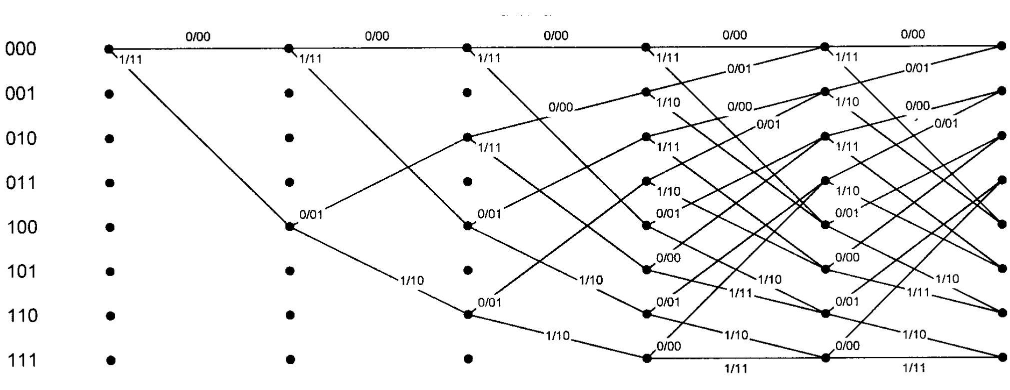
$$\Rightarrow \; s_2 = \underline{\underline{(1\ 1\ 0\ 0)}}$$

Aufgabe 10

a)



b)

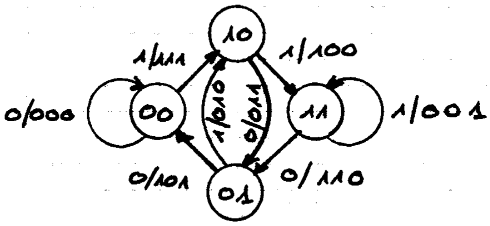


c) Die Nachrichtenfolge (1 0 0 0 ...)
ergibt die Codebitfolge (11 01 00 01 ...)
mit einem Hamming-Gewicht von

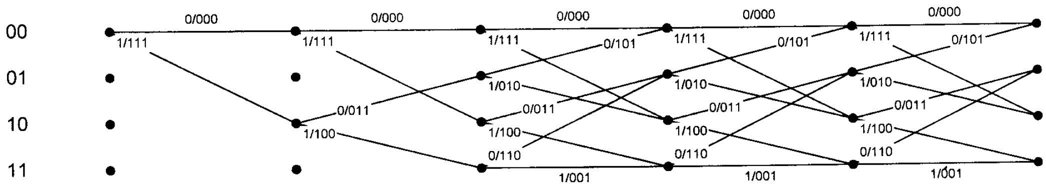
$d_{min} = 4$

Aufgabe 11

a)

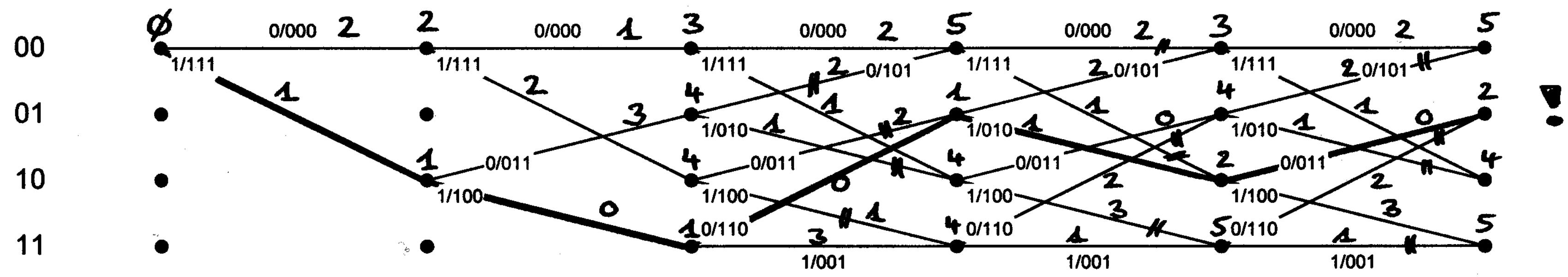


b)



c) $u = (1\ 1\ 1\ 0\ 1)$

$\Rightarrow \quad x = (111\ 100\ 001\ 110\ 010)$



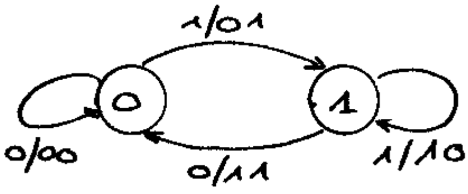
101 100 110 011 011

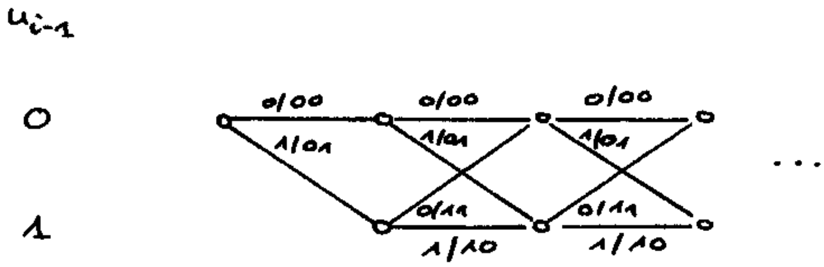
Geschätzter Endzustand: 01 mit totaler Hamming-Distanz 2 zum empfangenen Binärwort.

Die Rückverfolgung der nicht gestrichenen Pfade liefert die Nachrichtensequenz $\underline{\underline{\hat{u} = (1\,1\,0\,1\,0)}}$

Aufgabe 12

a)





b) Jedes Umweg von der Nullfolge hat mindestens das Hamming-Gewicht $w_{min} = 3$

$$\Rightarrow \quad d_{min} = 3$$

c) $N = 2 \cdot n + 2 = \underline{\underline{18}}$

d) Alle Pfade der Länge $n+1 = 9$, welche im Zustand (0) beginnen und im Zustand (0) enden, sind gültige Codewörter.

$\Rightarrow$ Das minimale Hamming-Gewicht eines Codewortes beträgt $w_{min} = 3$.

$$\Rightarrow \quad d_{min} = w_{min} = \underline{\underline{3}}$$

e) $d_{min} = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_K = 1}}$ (korrigieren)

f) $u = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$\Rightarrow \quad c = (01\ 11\ 00\ 00\ \ldots\ 00)$

$u = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$\Rightarrow \quad c = (00\ 01\ 11\ 00\ \ldots\ 00)$

usw.

$$\Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} 011100\ldots\ 00 \\ 00011100\ldots\ 00 \\ 0000011100\ldots 00 \\ \vdots \\ 00\ \ldots\ 0111 \end{bmatrix}$$

g) $P_{rest} = 1 - P_0 - P_1$

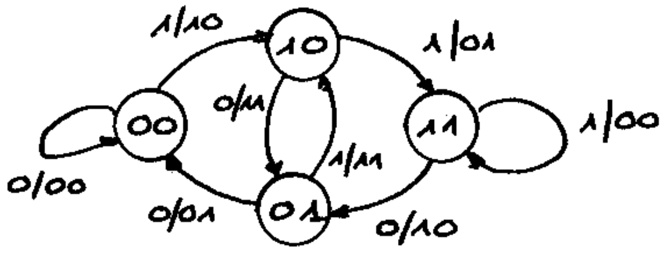
$= 1 - (1-P_b)^{18} - 18(1-P_b)^{17} \cdot P_b$

$= \underline{\underline{1{,}51 \cdot 10^{-4}}}$

h) Es gibt Codewortpaare, welche eine grössere Hamming-Distanz als 3 haben und wo demnach mehr als nur ein Fehler korrigiert werden kann.

Aufgabe 13

a)

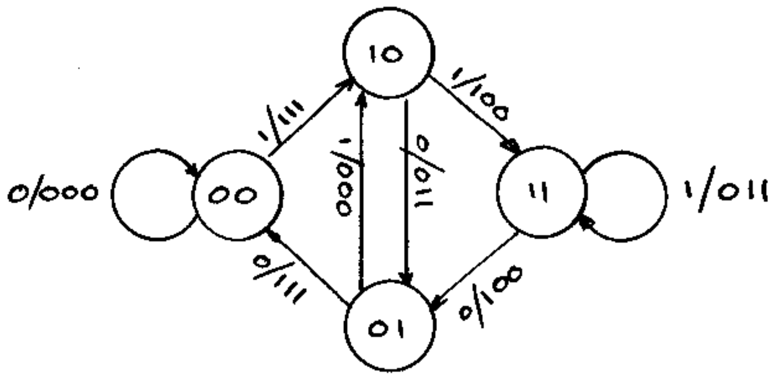


b) $c[.] = (10\ 01\ 00\ 00\ 00 \ldots)$

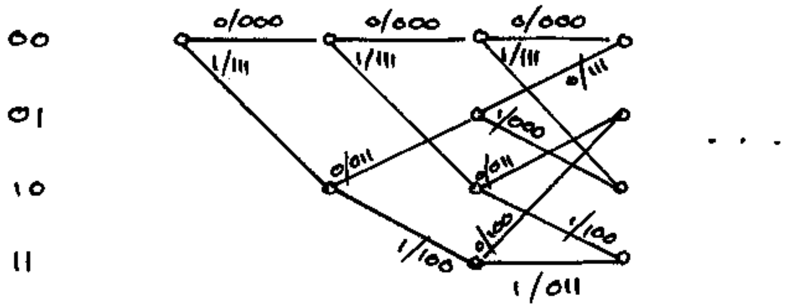
c) Obwohl das Nachrichtenwort $u[.]=(1\ 1\ 1 \ldots)$ sich in allen Stellen vom Nachrichtenwort $u[.] = (0\ 0\ 0 \ldots)$ unterscheidet, haben die entsprechenden Codefolgen nur eine Hamming-Distanz von 2.
=> Zwei Bitfehler bei der Übertragung führen auf unendlich viele Fehler bei der Decodierung.

Aufgabe 14

a)



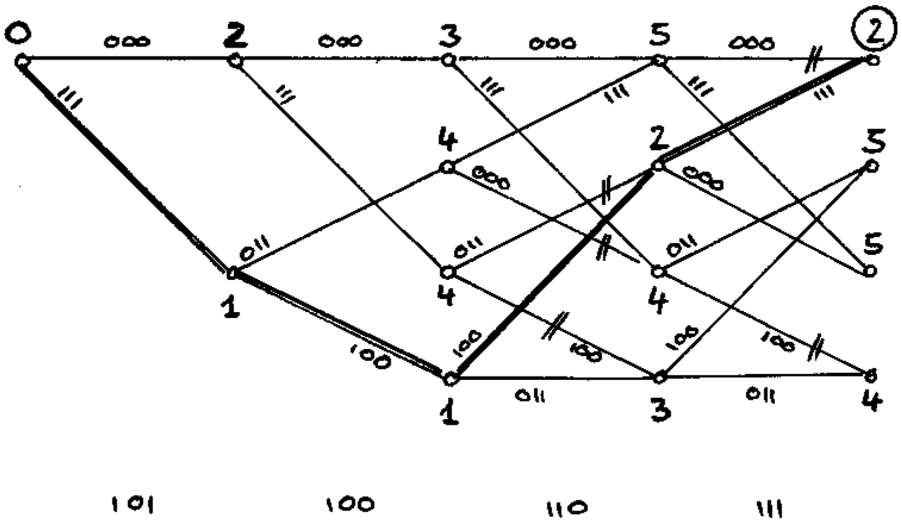
b)



c) $x[.] = (111 \quad 011 \quad 000 \quad 100 \quad 100)$

d) Aus Trellisdiagramm : $\underline{\underline{d_{min} = 8}}$

e)



$\Rightarrow \quad \hat{u}[.] = \underline{\underline{(1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)}}$

Anzahl Bitfehler: $\underline{\underline{2}}$

Aufgabe 15

a) $\quad d_{min} = w_{min} = \underline{\underline{3}}$

b) $\quad P_{fehlerfrei} = (1-P_b)^7 = 0{,}932$

$\Rightarrow \quad P_{verfälscht} = 1 - P_{fehlerfrei} = \underline{\underline{0{,}068}}$

c) $\quad P_{nicht\ erkannt} = 7 \cdot (1-P_b)^4 \cdot P_b^3 + 7 \cdot (1-P_b)^3 P_b^4 + P_b^7$

$= \underline{\underline{6{,}79 \cdot 10^{-6}}}$

d) $\quad P_{nicht\ erkannt} = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (1-P_b)^{n-i} \cdot P_b^i}}$

Aufgabe 16

a) Aus Schaltung: $\underline{\underline{g(x) = 1 + x^2 + x^3}}$

b) Anzahl Prüfbits: $\underline{\underline{k = 3}}$

Anzahl Nachrichtenbits: $n = N - k = \underline{\underline{4}}$

c) • $u_1 = (1000) \hat{=} u_1(x) = x^3$

$$x^k \cdot u_1(x) : g(x) = x^6 : (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^6 + x^5 + x^3} \\ \quad x^5 + x^3 \\ \quad \underline{x^5 + x^4 + x^2} \\ \qquad x^4 + x^3 + x^2 \\ \qquad \underline{x^4 + x^3 + x} \\ \qquad\qquad x^2 + x \;\hat{=}\; (1\,1\,0) \end{array}$$

$\Rightarrow c_1 = (1000110)$

• $u_2 = (0100) \hat{=} u_2(x) = x^2$

$$x^5 : (x^3 + x^2 + 1) = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^5 + x^4 + x^2} \\ \quad x^4 + x^2 \\ \quad \underline{x^4 + x^3 + x} \\ \qquad x^3 + x^2 + x \\ \qquad \underline{x^3 + x^2 + 1} \\ \qquad\qquad x + 1 \;\hat{=}\; (0\,1\,1) \end{array}$$

$\Rightarrow c_2 = (0100011)$

- $u_3 = (0010) \mathrel{\hat{=}} u_3(x) = x$

$$
\begin{array}{l}
x^4 : (x^3+x^2+1) = x+1 \\
\underline{x^4+x^3+x} \\
\quad x^3 + x \\
\quad \underline{x^3 + x^2 + 1} \\
\qquad x^2+x+1 \quad \hat{=} \ (111)
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad c_3 = (0010\ 111)$

- $u_4 = (0001) \mathrel{\hat{=}} u_4(x) = 1$

$$
\begin{array}{l}
x^3 : (x^3+x^2+1) = 1 \\
\underline{x^3+x^2+1} \\
\quad x^2+1 \quad \hat{=} \ (101)
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad c_4 = (0001\ 101)$

$$
G = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1000\ 110 \\ 0100\ 011 \\ 0010\ 111 \\ 0001\ 101 \end{bmatrix}}}
$$

d)

u	c
0000	0000000
0001	0001101
0010	0010111
0011	0011010
0100	0100011
0101	0101110
0110	0110100
0111	0111001
1000	1000110
1001	1001011
1010	1010001
1011	1011100
1100	1100101
1101	1101000
1110	1110010
1111	1111111

$d_{min} = w_{min} = \underline{\underline{3}}$

e) Erkennen: $f_e = d_{min} - 1 = \underline{\underline{2}}$

Korrigieren: $f_k = \underline{\underline{1}}$

f) $P_{Fehler} = 1 - P_0 - P_1$

0 Fehler: $P_0 = (1-P_b)^7 = 0{,}932$

1 Fehler: $P_1 = 7 \cdot P_b \,(1-P_b)^6 = 0{,}066$

$\Rightarrow P_{Fehler} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-3}}}$

g) $s(x) = r(x) : g(x)$

$r_1(x) = x^6 + x^5 + x^2 + x + 1$

$$\Rightarrow \quad s_1(x) = (x^6 + x^5 + x^2 + x + 1) : (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + 1$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^6 + x^5 + x^3} \\ \qquad x^3 + x^2 + x + 1 \\ \qquad \underline{x^3 + x^2 \quad\; + 1} \\ \qquad\qquad x \qquad \Rightarrow \underline{\underline{s_1 = (0\ 1\ 0)}} \end{array}$$

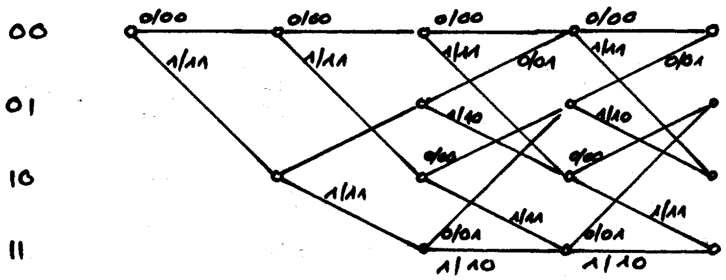
$r_2(x) = x^5 + x^4 + x^2$

$$\Rightarrow \quad s_2(x) = (x^5 + x^4 + x^2) : (x^3 + x^2 + 1) = x^2$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^5 + x^4 + x^2} \\ \qquad\quad 0 \qquad \Rightarrow \underline{s_2 = (0\ 0\ 0)} \end{array}$$

Aufgabe 17

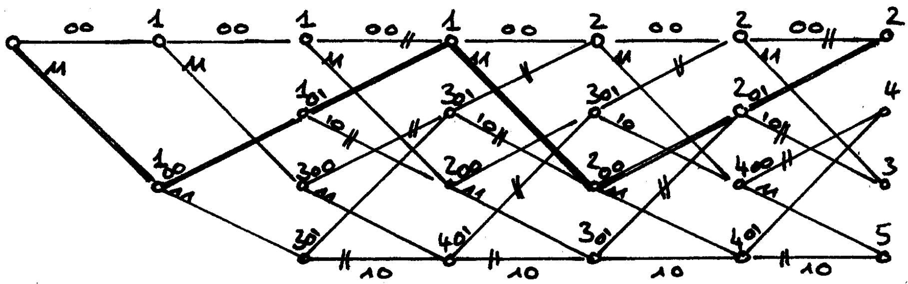
a)



b) $u = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0] \Rightarrow x = [11\ 11\ 01\ 10\ 00\ 01]$

c) $d_{min} = 3$

d)

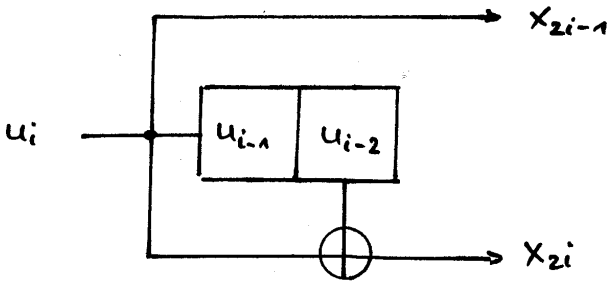


01 00 01 10 00 01

$\Rightarrow \hat{u} = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]$

Anzahl Bitfehler = 2

e)



Aufgabe 18

a)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$G' = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_1 + g_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b)

Codewörter:

$$v_1 = [0\ 0\ 0\ 0]$$
$$v_2 = [1\ 0\ 1\ 1]$$
$$v_3 = [0\ 1\ 0\ 1]$$
$$v_4 = [1\ 1\ 1\ 0]$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} [0\,0\,0\,0] & [1\,0\,1\,1] & [0\,1\,0\,1] & [1\,1\,1\,0] \\ [1\,0\,0\,0] & [0\,0\,1\,1] & [1\,1\,0\,1] & [0\,1\,1\,0] \\ [0\,1\,0\,0] & [1\,1\,1\,1] & [0\,0\,0\,1] & [1\,0\,1\,0] \\ [0\,0\,1\,0] & [1\,0\,0\,1] & [0\,1\,1\,1] & [1\,1\,0\,0] \end{bmatrix}}}$$

c)

$$r = [0\ 1\ 1\ 1] = v_i + e$$

Aus Standardmatrix: $r = [0\ 1\ 1\ 1]$

$$= [0\ 1\ 0\ 1] + [0\ 0\ 1\ 0]$$

$$\Rightarrow \quad v_i = [0\ 1\ 0\ 1]$$

$$\underline{\underline{e = [0\ 0\ 1\ 0]}}$$

d) Der empfangene Vektor wird in der Standardmatrix lokalisiert. Das wahrscheinlichste Codewort kann im ersten Element der entsprechenden Kolonne abgelesen werden. Der dazugehörige Klassenanführer entspricht dem Fehlermuster.

e) Nein, das Fehlermuster [0 0 0 1] ist kein Klassenanführer.

f) Fehler können korrigiert werden, falls das Fehlermuster [0 0 0 0], [1 0 0 0], [0 1 0 0] oder [0 0 1 0] ist.

$$P_{corr} = (1-p)^4 + 3 \cdot p \cdot (1-p)^3$$
$$= \underline{\underline{0,9897}}$$

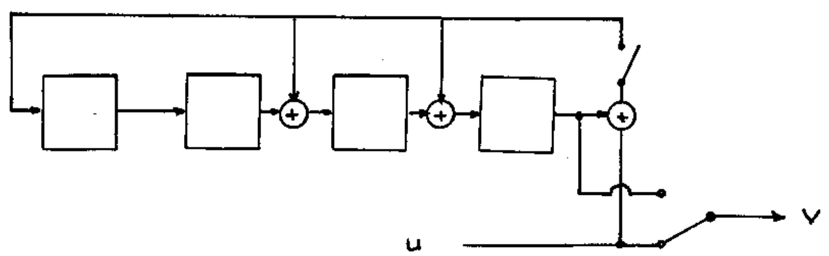
g) Alle Fehler, deren Muster einem Klassenanführer entspricht, können korrigiert werden.

$$\underline{\underline{P_{corr} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}}}$$

Aufgabe 19

a) $$g(X) = (1 \oplus X) \cdot (X^3 \oplus X \oplus 1)$$
$$= X^3 \oplus X \oplus 1 \oplus X^4 \oplus X^2 \oplus X$$
$$= \underline{\underline{X^4 \oplus X^3 \oplus X^2 \oplus 1}}$$

b)



c) $$u(X) = X^2 \oplus X \oplus 1$$

$$X^4 \cdot u(X) = X^6 \oplus X^5 \oplus X^4$$

$$\begin{array}{l} (X^6 \oplus X^5 \oplus X^4) : (X^4 \oplus X^3 \oplus X^2 \oplus 1) = X^2 \\ \underline{X^6 \oplus X^5 \oplus X^4 \oplus X^2} \\ \qquad\qquad\qquad X^2 \;\hat{=}\; 0100 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v = (1\,1\,1\,0\,1\,0\,0)}}$$

d) $$s(X) = r(X) \bmod g(X)$$
$$= v(X) \oplus e(X) \bmod g(X)$$
$$= \underbrace{v(X) \bmod g(X)}_{=0} \oplus e(X) \bmod g(X)$$

$$e(X) = X^6 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} X^6 : (X^4 \oplus X^3 \oplus X^2 + 1) = X^2 + X \\ \underline{X^6 + X^5 + X^4 + X^2} \\ \quad X^5 + X^4 + X^2 \\ \quad \underline{X^5 + X^4 + X^3 + X} \\ \qquad\quad X^3 + X^2 + X \;\hat{=}\; \underline{\underline{1\,1\,1\,0}} \end{array}$$

e) Alle zyklischen Permutationen von $v = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$ müssen Codewörter sein

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Dazu kommt noch das Codewort

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

f) $d_{min} = w_{min} = 4 \Rightarrow f_e = \underline{\underline{3}}$

g)
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

h) Ist nicht möglich, da $p(X)$ das Polynom $X^8 \oplus 1$ nicht ohne Rest teilt.

$$(X^8 + 1) : (X^3 + X + 1) = X^5 + X^3 + X^2 + X$$

$$\begin{array}{l} \underline{X^8 + X^6 + X^5} \\ \quad X^6 + X^5 \\ \quad \underline{X^6 + X^4 + X^3} \\ \qquad X^5 + X^4 + X^3 \\ \qquad \underline{X^5 + X^3 + X^2} \\ \qquad\quad X^4 + X^2 \\ \qquad\quad \underline{X^4 + X^2 + X} \\ \qquad\qquad\quad X \end{array}$$

Aufgabe 20

a) k = 2, m = 2

b) Nein, denn (1011) ⊕ (1110) = (0101) ist kein Codewort.

c) $d_{min} = 2 \Rightarrow$ Nur ein Fehler kann sicher erkannt werden.

Aufgabe 21

a) $r_1(x) = x^6 + x^5 + 1$

$$r_1(x) : g(x) = (x^6+x^5+1) : (x^4+x^2+x+1) = x^2+x+1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^6+x^4+x^3+x^2} \\
\quad x^5+x^4+x^3+x^2+1 \\
\quad \underline{x^5+x^3+x^2+x} \\
\qquad x^4+x+1 \\
\qquad \underline{x^4+x^2+x+1} \\
\qquad\quad x^2 \qquad \neq 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ kein Codewort

$r_2(x) = x^5+x^4+x^3+1$

$$r_2(x) : g(x) = (x^5+x^4+x^3+1) : (x^4+x^2+x+1) = x+1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^5+x^3+x^2+x} \\
\quad x^4+x^2+x+1 \\
\quad \underline{x^4+x^2+x+1} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Codewort

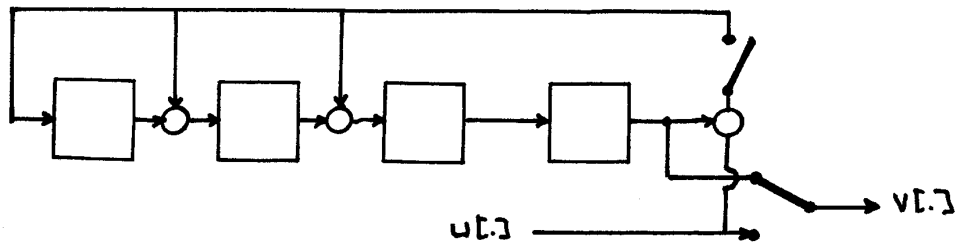
c) $c_1(x) = 1 \cdot g(x) = x^4+x^2+x+1 \mathrel{\hat{=}} 0010111$

$c_2(x) = x \cdot g(x) = x^5+x^3+x^2+x \mathrel{\hat{=}} 0101110$

$c_3(x) = x^2 \cdot g(x) = x^6+x^4+x^3+x^2 \mathrel{\hat{=}} 1011100$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} c_1+c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1001011 \\ 0101110 \\ 0010111 \end{bmatrix}}}$$

b)



d) $d_{min} = w_{min} = \underline{\underline{4}}$

e) $t = \dfrac{d_{min} - 2}{2} = \underline{\underline{1}}$

f) Fehler $\underline{e}$ kann nicht erkannt werden

$\Leftrightarrow \quad \underline{e} \in C - \{\underline{0}\}$

WSK: $P(\underline{e} \in C - \{\underline{0}\})$

$$= \sum_{\underline{c} \in C - \{\underline{0}\}} P_b^{w(\underline{c})} \cdot (1 - P_b)^{n - w(\underline{c})}$$

$$= 7 \cdot 0{,}02^4 \cdot (1 - 0{,}02)^3$$

$$= \underline{\underline{1{,}054 \cdot 10^{-6}}}$$

(Alle Codeworte $\neq \underline{0}$ haben Hamming-Gewicht $w(\underline{c}) = 4$)

g) $s_1(x) = R_{g(x)}[r_1(x)] = x \;\hat{=}\; \underline{\underline{(0000010)}}$

$s_2(x) = R_{g(x)}[r_2(x)] = x^3 \;\hat{=}\; \underline{\underline{(0001000)}}$

Aufgabe 22

a) $n-k = \underline{\underline{5}}$ $\qquad n = 8 \quad \Rightarrow \quad k = \underline{\underline{3}}$ $\qquad$ 2

b) $s = e \cdot H^T = e \cdot \begin{bmatrix} - h_1 - \\ - h_2 - \\ \vdots \\ - h_n - \end{bmatrix}$

$$e = (10000000) \Rightarrow s = h_1 = (10100)$$
$$e = (01000000) \Rightarrow s = h_2 = (01010)$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\Rightarrow \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad H = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}}} = \left[P^T \; I_5 \right] \qquad 2$$

$$\Rightarrow \qquad G = \left[I_k \; P \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}}} \qquad 2$$

c) $s = r_1 \cdot H^T = (0\ 0\ 1\ 0\ 1) \neq (0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$\Rightarrow \quad r_1 \notin C \qquad$ (kein Codewort)

Aus Syndromtabelle:

$s = (0\ 0\ 1\ 0\ 1) \Rightarrow e = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$\Rightarrow \quad \hat{u} = r_1 \oplus e = \underline{\underline{(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)}}$ 3

d) $s = r_2 \cdot H^T = (0\ 0\ 1\ 1\ 0) \neq (0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$\Rightarrow \quad r_2 \notin C \qquad$ (kein Codewort)

s ist nicht in Syndromtabelle
$\Rightarrow$ keine Korrektur möglich. 3

e) Codetabelle:

u	v
000	00000000
001	00100101
010	01001010
011	01101111
100	10010100
101	10110001
110	11011110
111	11111011

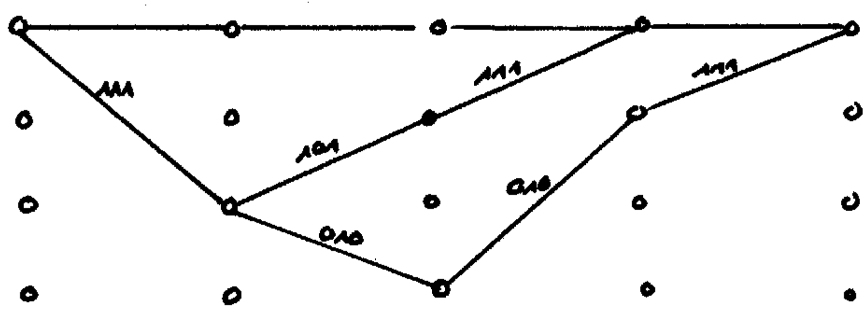
$\Rightarrow$ kein zyklischer Code. 3

Aufgabe 23

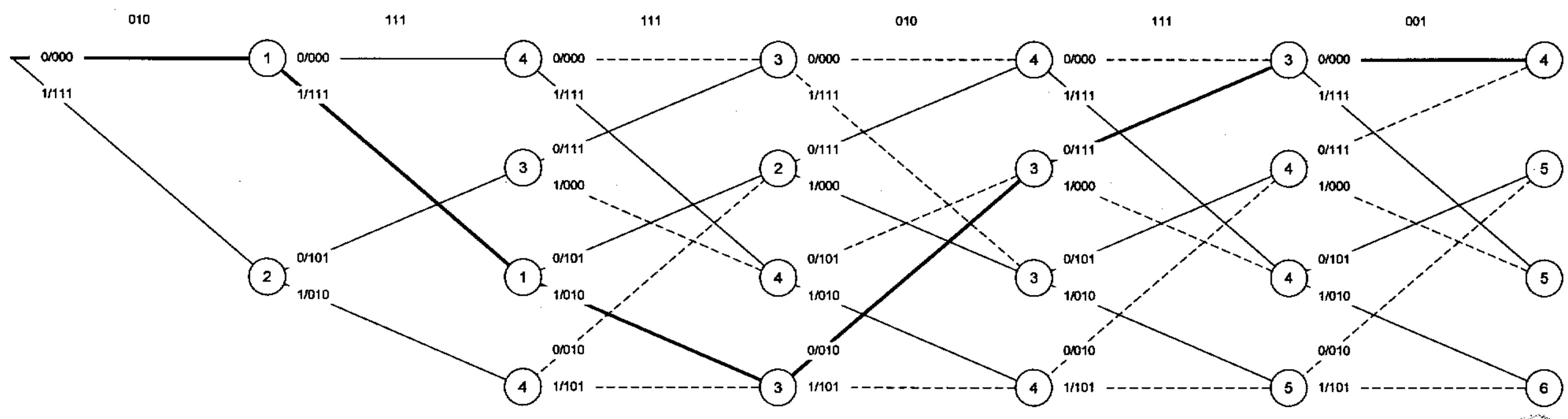
a) $u = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{v = (111\ \ 101\ \ 000\ \ 010\ \ 010\ \ 111)}}$ (1)

b)



$\Rightarrow \underline{\underline{d_{min} = 8}}$ (2)



5

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{u}[.] = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)}} \quad 1$$

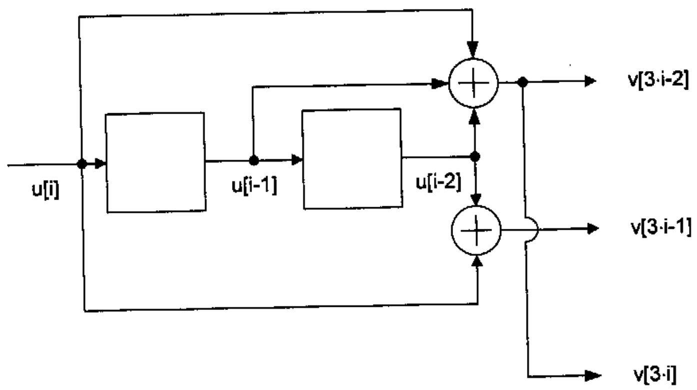
$$\text{Anzahl Bitfehler} = \underline{\underline{4}} \quad 1$$

d)

u[i]	u[i-1]	u[i-2]	v[3i-2]	v[3i-1]	v[3i]
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1

$\Rightarrow \quad v[3i-2] = v[3i] = u[i] \oplus u[i-1] \oplus u[i-2]$

$v[3i-1] = u[i] \oplus u[i-2]$



3

e)

u	v
0 0	000 000 000 000
0 1	000 111 101 111
1 0	111 101 111 000
1 1	111 010 010 111

2

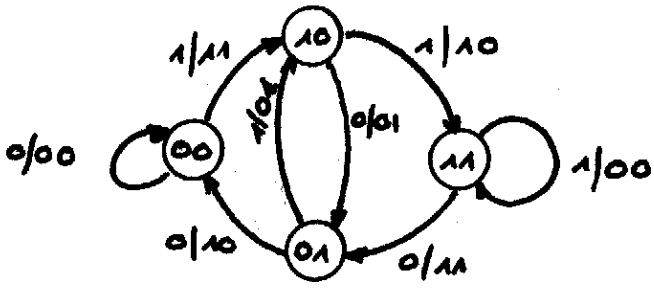
f) $w_{min} = d_{min} = 8$

=> Mindestens 3 Bitfehler können korrigiert werden.

2

Aufgabe 24

a)



b) Schleife mit Hamming-Gewicht 0.

=> Eine endliche Anzahl Übertragungsfehler kann zu unendlich vielen falsch decodierten Bits führen

=> Chaotischer Code.

Aufgabe 25

Elemente von GF(2^3):

Potenzdarstellung	Polynomdarstellung	Binäre Darstellung	Ganzzahldarstellung
	0	0 0 0	0
α^0	1	0 0 1	1
α^1	α	0 1 0	2
α^2	α^2	1 0 0	4
α^3	$\alpha^2 \oplus 1$	1 0 1	5
α^4	$\alpha^2 \oplus \alpha \oplus 1$	1 1 1	7
α^5	$\alpha \oplus 1$	0 1 1	3
α^6	$\alpha^2 \oplus \alpha$	1 1 0	6

Beispiel:

$$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha \cdot \left(\alpha^2 \oplus 1\right) = \alpha^3 \oplus \alpha = \underbrace{\alpha^2 \oplus 1}_{=\alpha^3} \oplus \alpha \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} 7$$

Additionstabelle:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3 &\mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} \alpha \oplus 1 \\ 7 &\mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} \alpha^2 \oplus \alpha \oplus 1 \end{aligned} \Rightarrow 3 \oplus 7 \mathrel{\hat{=}} (\alpha \oplus 1) \oplus \left(\alpha^2 \oplus \alpha \oplus 1\right) = \alpha^2 \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} 4$$

Multiplikationstabelle:

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	1	7	3	2	6
5	0	5	7	2	3	6	4	1
6	0	6	1	7	2	4	3	5
7	0	7	3	4	6	1	5	2

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \alpha + 1 = \alpha^5 \\ 7 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^4 \end{array}\right. \Rightarrow 3 \cdot 7 \triangleq \alpha^5 \cdot \alpha^4 = \alpha^9 = \underbrace{\alpha^7}_{=1} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq 4$$

Berechnungen

i. Es gilt $5 \otimes 7 = 1$, woraus folgt $5^{-1} = 7$

ii. $3^3 = 3 \otimes 3 \otimes 3 = 5 \otimes 3 = 2$

iii. Es gilt $4 \otimes 4 = 4^2 = 7$, woraus folgt $\sqrt{7} = 4$

iv. Es gilt $\alpha^5 = 3$, woraus folgt $\log_\alpha(3) = 5$

Diskrete Fouriertransformation

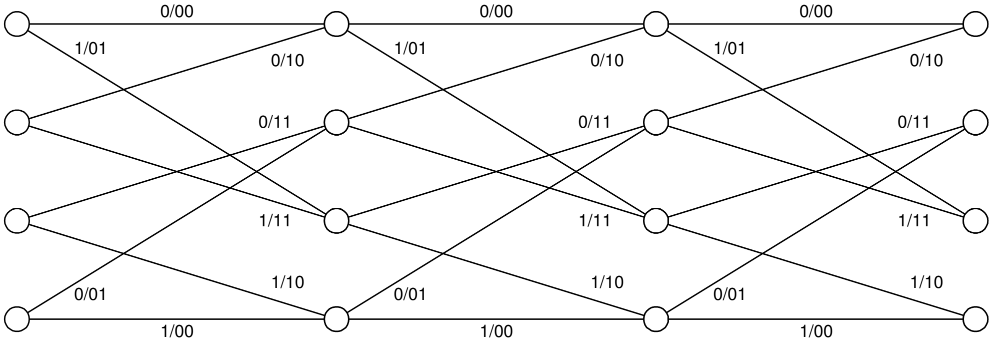
$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \alpha^{-i \cdot k} \\ &= v_1 \cdot \alpha^{-k} \oplus v_2 \cdot \alpha^{-2\cdot k} \oplus v_3 \cdot \alpha^{-3\cdot k} \oplus v_4 \cdot \alpha^{-4\cdot k} \oplus v_5 \cdot \alpha^{-5\cdot k} \oplus v_6 \cdot \alpha^{-6\cdot k} \oplus v_7 \cdot \alpha^{-7\cdot k} \\ &= \alpha^{-k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \alpha^{-3} & \alpha^{-4} & \alpha^{-5} & \alpha^{-6} & \alpha^{-7} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot \alpha^{+1\cdot k} \\ &= \frac{1}{n} \left(V_1 \cdot \alpha^1 \oplus V_2 \cdot \alpha^2 \oplus V_3 \cdot \alpha^3 \oplus V_4 \cdot \alpha^4 \oplus V_5 \cdot \alpha^5 \oplus V_6 \cdot \alpha^6 \oplus V_7 \cdot \alpha^7 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\alpha^{-1} \cdot \alpha^1 \oplus \alpha^{-2} \cdot \alpha^2 \oplus \alpha^{-3} \cdot \alpha^3 \oplus \alpha^{-4} \cdot \alpha^4 \oplus \alpha^{-5} \cdot \alpha^5 \oplus \alpha^{-6} \cdot \alpha^6 \oplus \alpha^{-7} \cdot \alpha^7 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 26

a)

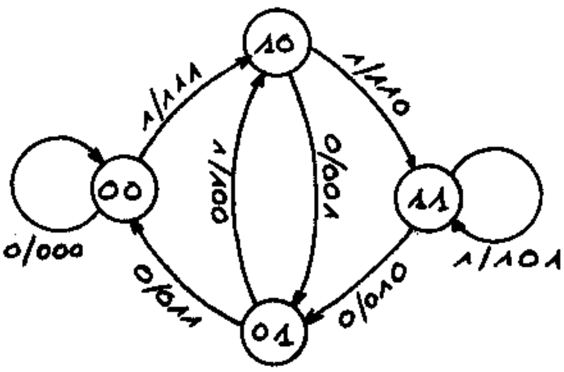


b) $(x_{2i-1}x_{2i})$ = 00, 00, 00, 00, ...

c) $(\hat{u}_i)$ = 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
Eine endliche Anzahl Übertragungsfehler führt auf eine unendliche Anzahl Decodierfehler
$\Rightarrow$ Als fehlerkorrigierender Code nicht geeignet.

Aufgabe 27

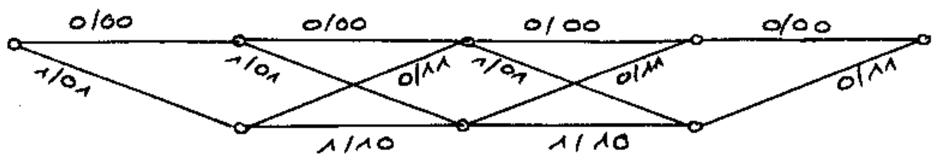
a)



b) x[.] = (111 110 010 011)

Aufgabe 28

b)



a)

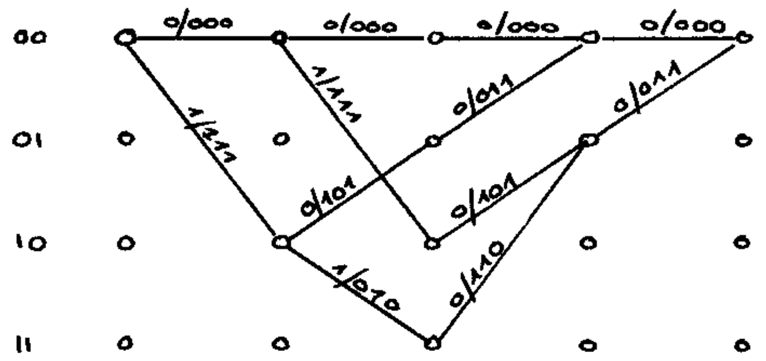
u	x	Hamming-Distanz zu 01 01 11 00
0000	00 00 00 00	4
0010	00 00 01 11	5
0100	00 01 11 00	1
0110	00 01 10 11	4
1000	01 11 00 00	3
1010	01 11 01 11	4
1100	01 10 11 00	2
1110	01 10 10 11	5

c)

$$\underline{\underline{\hat{u} = (0\,1\,0\,0)}}$$

Aufgabe 29

a)



b)

(u_1, u_2, u_3, u_4)	Codewort
0000	000 000 000 000
0100	000 111 101 011
1000	111 101 011 000
1100	111 010 110 011

c) Kleinste Hamming-Distanz zum Codwort
111 101 011 000 (3 Fehler)

→ Gesendete Nachricht: 1000

d) Minimale Hamming-Distanz: $d_{min} = 7$

=> 3 Übertragungsfehler korrigierbar.

Aufgabe 30

a) zyklische Vertauschungen:

$c_1 = (1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0) \Rightarrow c_3 = (1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1)$

$c_4 = (0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1)$

$c_5 = (0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0)$

$c_2 = (1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0) \Rightarrow c_6 = (0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1)$

Linearkombination von Codewörtern:

$c_7 = c_2 + c_6 = (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1)$

$c_8 = c_1 + c_1 = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)$

b)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $g(x)$: Polynom von der Ordnung $n-k=5$, welches einem Codewort entspricht.

$$\Rightarrow \quad g(x) = c_4(x) = \underline{\underline{x^5 + x^4 + x + 1}}$$

Aufgabe 31

a)

–	0	0 0	0
α^0	1	0 1	1
α^1	α	1 0	2
α^2	$\alpha+1$	1 1	3

b)

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(\alpha+1) = \alpha^2+\alpha = \underline{\underline{1}}$$

c)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

d)

$$3^{-1} = 2$$

$$2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 3 = 1$$

$$\sqrt{2} = 3$$

$$\log_\alpha(3) = 2$$

Aufgabe 32

Für einen systematischen, linearen (6,3)-Blockcode werden die drei Prüfbits wie folgt aus den Nachrichtenbits u_1, u_2 und u_3 bestimmt:

$$p_1 = 1 \cdot u_1 \oplus 1 \cdot u_2 \oplus 1 \cdot u_3$$

$$p_2 = 1 \cdot u_1 \oplus 1 \cdot u_2 \oplus 0 \cdot u_3$$

$$p_3 = 0 \cdot u_1 \oplus 1 \cdot u_2 \oplus 1 \cdot u_3$$

a) Geben Sie die systematische Generatormatrix für diesen Code an.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Konstruieren Sie alle möglichen Codewörter.

u	**v**
000	000000
001	001101
010	010111
011	011010
100	100110
101	101011
110	110001
111	111100

c) Wie viele Bitfehler können mit diesem Code sicher korrigiert werden?

$w_{\min} = d_{\min} = 3 \quad \Rightarrow$ Einzelne Bitfehler können sicher korrigiert werden

d) Geben Sie die Prüfmatrix **H** des Codes an.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Berechnen Sie den Wert des Syndromvektors für das Fehlermuster **e** = [1 1 0 0 0 0].

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}^T = (\mathbf{v} \oplus \mathbf{e}) \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

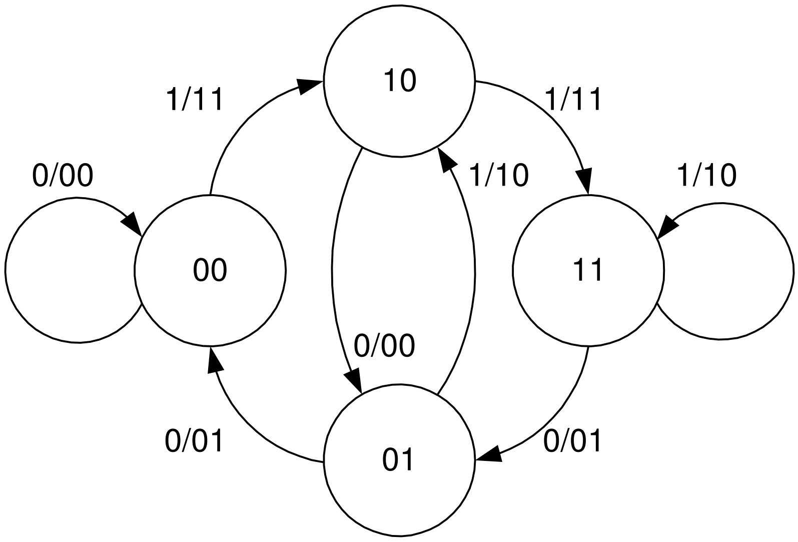
f) Welches Bit würde der Decoder mit dem in e) berechneten Syndrom korrigieren?

Der Einzelbitfehler $\mathbf{e}$ *= [0 0 0 0 0 1] würde das Syndrom* $\mathbf{s}$ *= [0 0 1] ergeben. Folglich würde das 6. Bit korrigiert.*

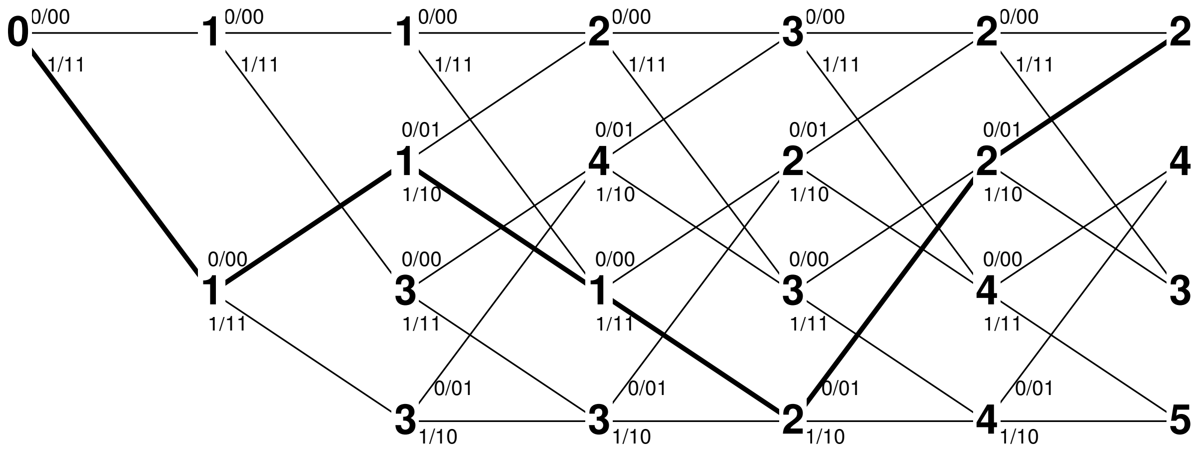
Aufgabe 33

Ein Faltungsencoder mit vier Zuständen gibt mit der Eingangssequenz u[.] = (0 1 1 1 0 1 0 0) die Ausgangssequenz v[.] = (00 11 11 10 01 10 00 01) aus. Dabei nehmen wir an, dass im Zustand 00 gestartet wurde.

a) Vervollständigen Sie das nachfolgende Zustandsdiagramm des Encoders.



b) Die Sequenz r[.] = (10 00 10 01 01 01) wird empfangen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus den wahrscheinlichsten Pfad durch den Trellis, falls der Startzustand mit 00 angenommen wird.
Hinweis: Die maximale Punktzahl wird nur erteilt, falls für alle Knoten des Trellis die jeweils optimale Metrik angegeben wird.



c) Welche Bitsequenz gibt der Viterbi-Decoder aus?

$$\hat{u}[.] = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

Aufgabe 34

a) $v = u \cdot G$

u	v
000	0000000
001	0010111
010	0101110
011	0111001
100	1011100
101	1001011
110	1110010
111	1100101

b) $d_{min} = w_{min} = 4$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{d_{min}-2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

c) $g(x)$: Polynom vom Grad $n-k = 4$, das ein Codewort repräsentiert

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{g(x) = x^4 + x^2 + x + 1}}$$

d) $r_1(x) = x^5 + x^3 + x$

$$(x^5 + x^3 + x) : (x^4 + x^2 + x + 1) = x$$

$$\frac{x^5 + x^3 + x^2 + x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{s_1 = (0\ 1\ 0\ 0)}}$$

$$r_2 \in C \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{s_2 = (0\ 0\ 0\ 0)}}$$

Aufgabe 35

a)

x	0	1	α	$1+\alpha$
$-x$	0	1	α	$1+\alpha$
x^{-1}	—	1	$1+\alpha$	α

b)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ \alpha^{-2} & \alpha^{-4} & \alpha^{-6} \\ \alpha^{-3} & \alpha^{-6} & \alpha^{-9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 \\ \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1+\alpha & 1 \\ 1+\alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $(1+\alpha \quad 0 \quad 0)$

e) Körper enthält $q=4$ Elemente

$\Rightarrow \quad n = q-1 = \underline{\underline{3}}$

f) $k = n-2t = 1 \quad \Rightarrow \quad q^k = 4$ Codeworte

g) $\mathbf{v} \in C \iff \mathbf{V} = (0 \quad 0 \quad V_3)$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} \cdot A^{-1}$$

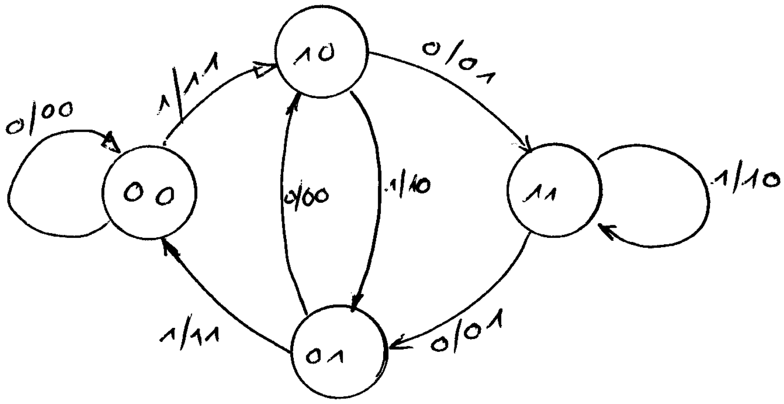
$$= (0 \quad 0 \quad V_3) \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1+\alpha & 1 \\ 1+\alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (V_3 \quad V_3 \quad V_3)$$

$$C = \{ (0 \; 0 \; 0), (1 \; 1 \; 1), (\alpha \; \alpha \; \alpha), (1+\alpha \quad 1+\alpha \quad 1+\alpha) \}$$

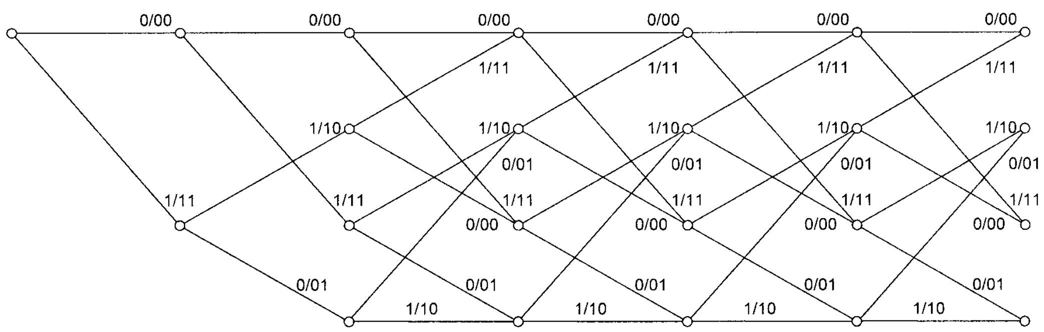
Aufgabe 36

a)



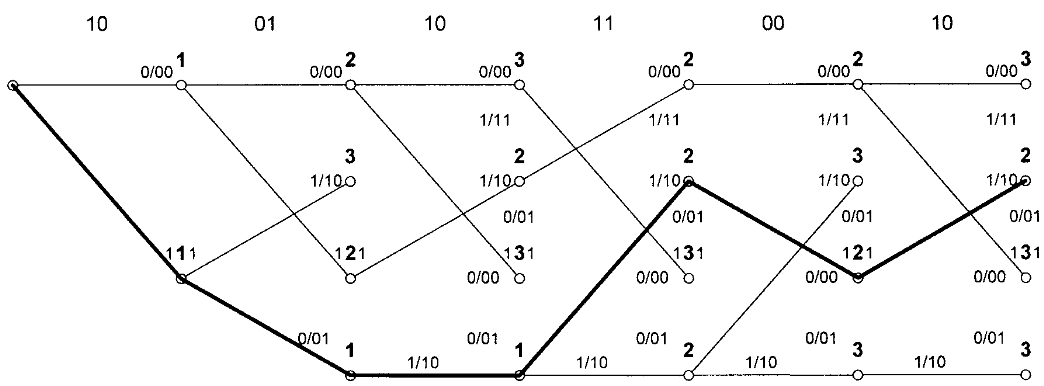
b) v[.] = (1 1 1 0 1 1 1 1 0 1)

c)



d) dmin = $\underline{\underline{5}}$

e)



Anzahl Fehler: $\underline{\underline{2}}$

Aufgabe 37

a) zyklische Vertauschungen:

$c_1 = (11001100) \Rightarrow c_3 = (10011001)$

$c_4 = (00110011)$

$c_5 = (01100110)$

$c_2 = (10101010) \Rightarrow c_6 = (01010101)$

Linearkombination von Codeworten:

$c_7 = c_2 + c_6 = (11111111)$

$c_8 = c_1 + c_1 = (00000000)$

b)

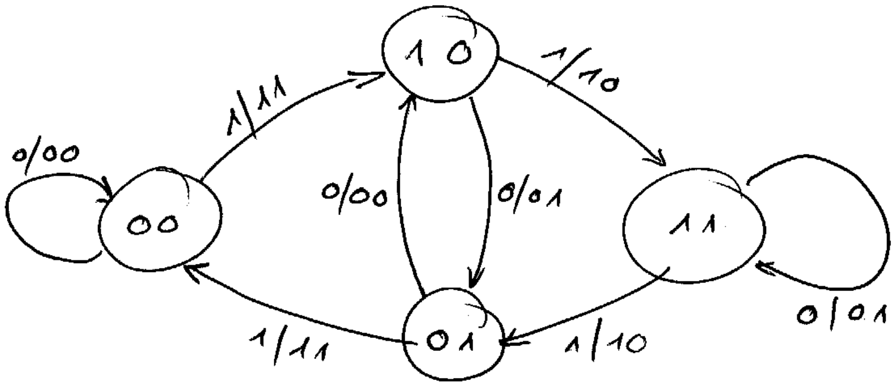
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $g(x)$: Polynom von der Ordnung $n-k=5$, welches einem Codewort entspricht.

$$\Rightarrow \quad g(x) = c_4(x) = \underline{\underline{x^5 + x^4 + x + 1}}$$

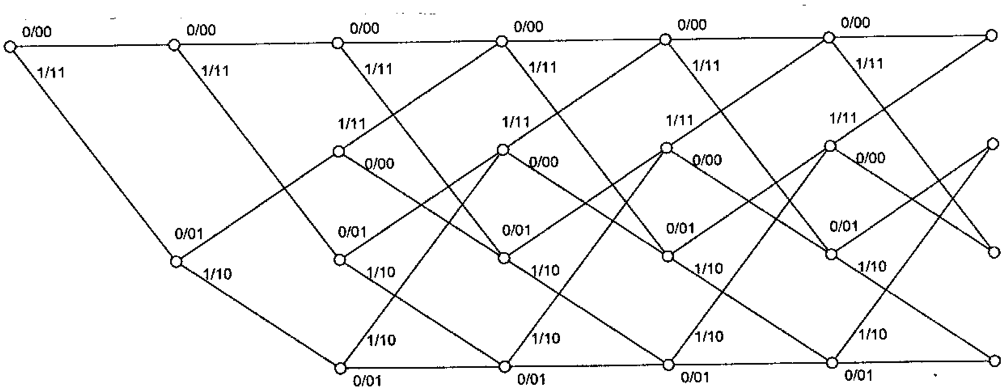
Aufgabe 38

a)



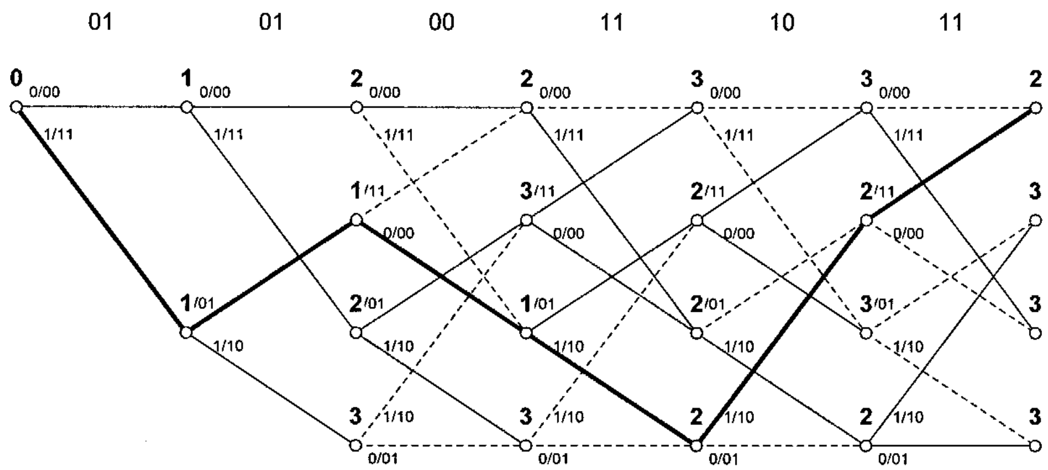
b) $v[\cdot]$ = 11 10 10 11 00

c)



d) $d_{min} = \underline{\underline{5}}$

e)



$\hat{u}[.]$ = $\underline{\underline{1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1}}$

Anzahl Fehler = $\underline{\underline{2}}$