LÖSUNGEN STOCHASTISCHE SIGNALE

Aufgabe 1

$$E\left[\left(X(t)-m_X\right)^2\right] = E\left[X^2(t) - 2\cdot X(t)\cdot m_X + m_X^2\right]$$

$$= E\left[X^2(t)\right] - 2\cdot m_X \cdot \underbrace{E\left[X(t)\right]}_{=m_X} + m_X^2$$

$$= E\left[X^2(t)\right] - m_X^2$$

Aufgabe 2

a) $$E\left[X(t)\right] = E\left[Y\cdot\cos(\omega t) + Z\cdot\sin(\omega t)\right]$$

$$= E[Y]\cdot\cos(\omega t) + E[Z]\cdot\sin(\omega t)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

b) $$E\left[X^2(t)\right] = E\left[Y^2\cos^2(\omega t) + 2\cdot Y\cdot Z\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin(\omega t) + Z^2\sin^2(\omega t)\right]$$

$$= \underbrace{E\left[Y^2\right]}_{=\sigma^2}\cdot\cos^2(\omega t) + 2\cdot\underbrace{E\left[Y\cdot Z\right]}_{=0}\cdot\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \underbrace{E\left[Z^2\right]}_{=\sigma^2}\sin^2(\omega t)$$

$$= \sigma^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)$$

$$= \underline{\underline{\sigma^2}}$$

c) $$X(t_1)\cdot X(t_2) = \left(Y\cdot \cos(\omega t_1) + Z\cdot \sin(\omega t_1)\right)\cdot\left(Y\cos(\omega t_2) + Z\sin(\omega t_2)\right)$$

$$= Y^2\cos(\omega t_1)\cdot \cos(\omega t_2) + Z^2\cdot \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2) +$$

$$+ Y\cdot Z\left(\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2)\right)$$

$$\Rightarrow E\left[X(t_1)X(t_2)\right] = \sigma^2\left(\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)\right)$$

$$= \sigma^2\cdot \cos\left(\omega\left(t_1 - t_2\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\sigma^2\cdot \cos(\omega\cdot\tau)}}$$

$$= R_{XX}(\tau)$$

d) $E[X(t)]$ konstant

$$E[X(t_1)X(t_2)] = R_{XX}(\tau)$$

$\Rightarrow$ schwach stationär

e) Musterfunktion: $x(t) = y\cdot\cos(\omega t) + z\cdot\sin(\omega t)$.

$$\Rightarrow x^2(t) = y^2\cdot\cos^2(\omega t) + 2\cdot y\cdot z\cdot\cos(\omega t)\sin(\omega t) + z^2\sin^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(y^2 + z^2\right)$$

$\Rightarrow$ Zeitmittelwert ist von den Werten y und z und ist nicht gleich dem Scharmittelwert $E[X^2(t)] = \sigma^2$.

Aufgabe 3

a) $E[X(t)] = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{1}}$

$E[X^2(t)] = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \underline{\underline{2}}$

$E[X^3(t)] = \frac{1}{2} \cdot 0^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 = \underline{\underline{4}}$

$E[X(0) \cdot X(t)] = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$

b) Die statistischen Eigenschaften hängen nicht von der Zeit ab
$\Rightarrow$ stationärer Prozess.

c) Die Zeitmittelwerte hängen vom Ergebnis des Zufallsexperiments ab.

Zahl: Alle Zeitmittelwerte gleich Null

Kopf: $\overline{x(t)} = 2$

$\overline{x^2(t)} = 4$

$\vdots$

$\Rightarrow$ Prozess ist nicht ergodisch.

Aufgabe 4

a)
$$\underline{H}(f) = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j2\pi f\cdot\tau}}}$$

b)
$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f)\cdot\left|\underline{H}(f)\right|^2$$
$$= \underline{\underline{\frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{1+(2\pi f\tau)^2}}}$$

c)
$$R_{YY}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[S_{YY}(f)\right] = \underline{\underline{\frac{\eta}{4\cdot\tau}\cdot e^{-\frac{|t|}{\tau}}}} \quad \text{(aus Tabelle)}$$

d)
$$P_Y = R_{YY}(0) = \underline{\underline{\frac{\eta}{4\cdot\tau}}}$$

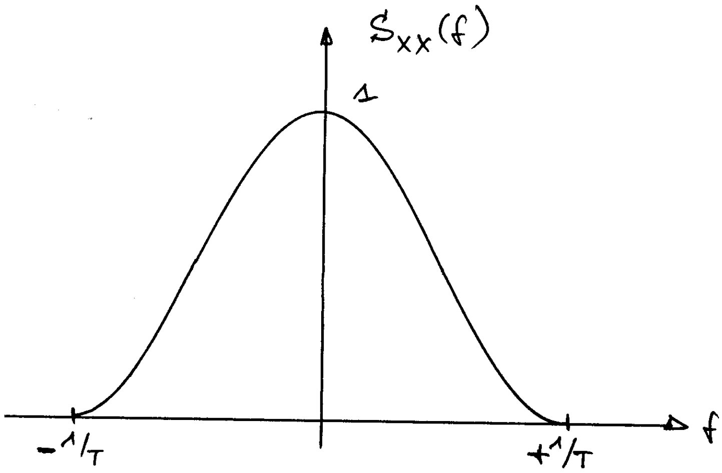
Alternatives Lösungsweg: $P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YY}(f)\,df = \frac{\eta}{2}\cdot\left.\frac{\arctan(2\pi f\tau)}{2\pi\tau}\right|_{-\infty}^{+\infty}$

$$= \underline{\underline{\frac{\eta}{4\cdot\tau}}}$$

e)
$$P = 2\cdot B\cdot\frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{4\tau} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = \frac{1}{4\tau}}}$$

Aufgabe 5

a)



b)

$$\int_{-1/T}^{1/T} \frac{1}{2} \cdot e^{j2\pi f t}\, df = \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{2\pi t}$$

$$\int_{-1/T}^{+1/T} \frac{\cos(\pi f T)}{2} \cdot e^{j2\pi f t}\, df = -2t \; \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\pi\left(4t^2 - T^2\right)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$$= \int_{-1/T}^{+1/T} \frac{1 + \cos(\pi f t)}{2} \cdot e^{j2\pi f t}\, df$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{2\pi t} - 2t \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\pi\left(4t^2 - T^2\right)}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{T^2}{2\pi t} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{4t^2 - T^2}}}$$

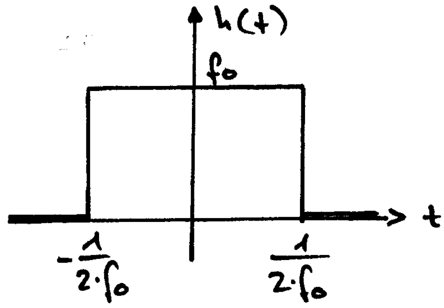
c) $R_{xx}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t = k \cdot \frac{T}{2}}}$

Aufgabe 6

a) $$H(f) = \frac{\sin(\pi \cdot f/f_0)}{\pi \cdot f/f_0} = si(\pi \cdot f/f_0)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$h(t) = f_0 \cdot rect(f_0 \cdot t)$$



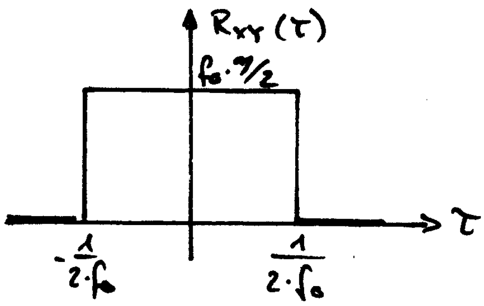
b) $$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{XX}(f)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sin^2(\pi \cdot f/f_0)}{(\pi \cdot f/f_0)^2} \cdot \frac{\eta}{2}}}$$

c) $$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot R_{XX}(\tau - u)\, du$$

$$= \frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, \delta(\tau - u)\, du$$

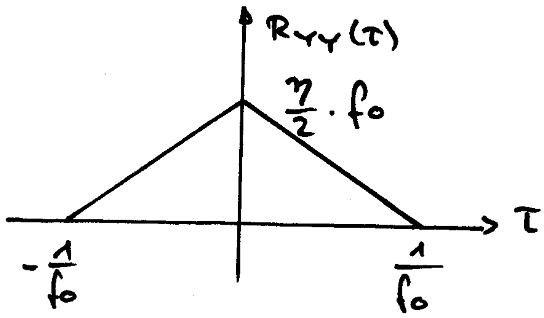
$$= \frac{\eta}{2} \cdot h(\tau)$$



d) $S_{YY}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{XX}(f) = H(f) \cdot H(f) \cdot \frac{\eta}{2}$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$

$R_{YY}(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot [h(t) * h(t)]$



e) $P = R_{YY}(0) = \underline{\underline{\frac{\eta}{2} \cdot f_0}}$

f) $B \cdot \eta \overset{!}{=} \frac{\eta}{2} \cdot f_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = \frac{f_0}{2}}}$

Aufgabe 7

a)

$$E[X(t)] = E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)]$$

$$= E[\cos(2\pi f_0 t)\cdot\cos(\phi) - \sin(2\pi f_0 t)\sin(\phi)]$$

$$= \cos(2\pi f_0 t)\cdot\underbrace{E[\cos(\phi)]}_{=0} - \sin(2\pi f_0 t)\cdot\underbrace{E[\sin(\phi)]}_{=0}$$

$$= \underline{\underline{0}} \qquad 2$$

b)

$$E[X(t_1)\cdot X(t_2)] = E[\cos(2\pi f_0 t_1 + \phi)\cdot\cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)]$$

$$= \frac{1}{2}E\left[\cos\left(2\pi f_0(t_1 - t_2)\right) + \cos\left(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\phi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0(t_1-t_2)\right) + \frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2))\cos(2\phi) - \sin(2\pi f_0(t_1+t_2))\sin(2\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0(t_1-t_2)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0(t_1+t_2)\right)\cdot E[\cos(2\phi)]$$
$$- \frac{1}{2}\sin\left(2\pi f_0(t_1+t_2)\right)\cdot E[\sin(2\phi)]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0(t_1-t_2)\right)}} \qquad 3$$

c) $E[X(t)] = \text{const}$

$E[X(t_1)X(t_2)] = R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(\tau)$

$\Rightarrow$ $X(t)$ ist schwach stationär. (1)

d) $E[Z(t_1)Z(t_2)] = E[X(t_1)Y(t_1)X(t_2)\cdot Y(t_1)]$

$= E[X(t_1)X(t_2)]\cdot E[Y(t_1)Y(t_2)]$

$= R_{XX}(\tau)\cdot R_{YY}(\tau)$

$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\cdot R_{YY}(\tau)$ (2)

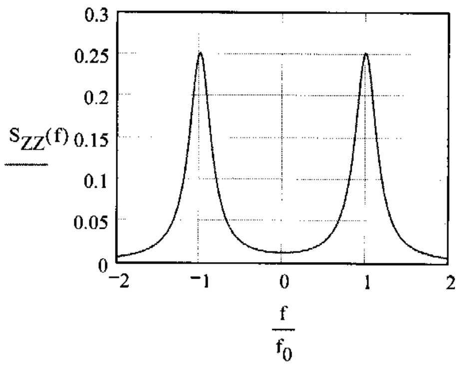
e) $E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)] = R_{ZZ}(t_1 - t_2) = R_{ZZ}(\tau)$

$\Rightarrow$ $Z(t)$ ist schwach stationär. (1)

f) $R_{ZZ}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)\cdot R_{YY}(t)$

$$S_{ZZ}(f) = \left[\frac{1}{4}\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}\delta(f+f_0)\right] * S_{YY}(f)$$

$$= \frac{1}{4}S_{YY}(f-f_0) + \frac{1}{4}S_{YY}(f+f_0)$$



(3)

Aufgabe 8

a) $$P_{S,Aus} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot P_{S,Ein}$$

b) $$P_{R,Ein} = k \cdot T_Q \cdot B$$

c) $$P_{R,Aus} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 k \cdot T_Q \cdot B + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot k \cdot T_{e1} \cdot B + $$
$$+ G_2 \cdot G_3 \cdot k \cdot T_{e2} \cdot B + G_3 \cdot k \cdot T_{e3} \cdot B$$

d) $$F = \frac{SNR_{Ein}}{SNR_{Aus}}$$

$$= \frac{\dfrac{P_{S,Ein}}{k \cdot T_Q \cdot B}}{\dfrac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot P_{S,Ein}}{k \cdot B \left(G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot T_Q + G_1 G_2 G_3 T_{e1} + G_2 G_3 T_{e2}, + G_3 \cdot T_{e3}\right)}}$$

$$= \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot T_Q + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot T_{e1} + G_2 \cdot G_3 \cdot T_{e2} + G_3 \cdot T_{e3}}{T_Q \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$$

$$= 1 + \frac{T_{e1}}{T_Q} + \frac{1}{G_1} \cdot \frac{T_{e2}}{T_Q} + \frac{1}{G_1 \cdot G_2} \cdot \frac{T_{e3}}{T_Q}$$

e) $$F_1 = 1 + \frac{T_{e1}}{T_Q} \quad , \quad F_2 = 1 + \frac{T_{e2}}{T_Q} \Rightarrow \frac{T_{e2}}{T_Q} = F_2 - 1 \, ,$$

$$F_3 = 1 + \frac{T_{e3}}{T_Q} \Rightarrow \frac{T_{e3}}{T_Q} = F_3 - 1$$

$$\Rightarrow F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 \cdot G_2}$$

Aufgabe 9

a) Rauschleistung am Eingang:

$$P_{R,Ein} = k \cdot T \cdot B = 40 \cdot 10^{-18}\,W \mathrel{\hat{=}} -134\,dBm$$

Signal-zu-Rauschverhältnis wird durch den Empfänger um $F = 5\,dB$ verschlechtert.

⇒ Minimal notwendiges SNR am Empfängereingang:

$$SNR_{Ein} = 20\,dB + 5\,dB = 25\,dB$$

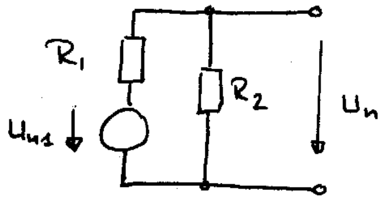
⇒ Minimale Empfangsleistung:

$$P_{S,Ein} = -134\,dBm + 25\,dB$$

$$= \underline{\underline{-109\,dBm}}$$

Aufgabe 10

a)



$$U_n = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{n1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sqrt{4kTB \cdot R_1}$$

b) Analog zur Aufgabe a): $U_n = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \sqrt{4kTBR_2}$

c) $$U_n^2 = \left(U_{n|U_{n2}=0}\right)^2 + \left(U_{n|U_{n1}=0}\right)^2$$

$$= \frac{R_2^2 \cdot 4 \cdot k T \cdot B R_1 + R_1^2 \cdot 4 \cdot k \cdot T \cdot B \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$= 4kTBR_1R_2 \frac{R_2 + R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \underline{\underline{4kTB \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}}$$

d) Rauschspannung eines einzelnen Widerstands R_{tot}:

$$U_n = \sqrt{4kTBR_{tot}}$$

Vergleich mit Aufgabe c) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{R_{tot} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}}$

Ein einzelner Widerstand mit dem Wert R_{tot} rauscht gleich stark wie die Parallelschaltung von R_1 und R_2.

Aufgabe 11

a) $$\acute{S}_{YY}(f) = S_{nn}(f) \cdot |\underline{H}(f)|^2$$

$$= \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + 2\cdot\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\eta}{2} \cdot \frac{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^4}}}$$

b) $$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \acute{S}_{YY}(f)\, df$$

$$= \frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^4}\, df \qquad F = \frac{f}{f_0}$$

$$df = f_0 \cdot dF$$

$$= f_0 \cdot \frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^2}{1+F^4}\, dF$$

$$= f_0\, \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\ln(1) + \pi + \pi - \ln(1) + \pi + \pi\right]$$

$$= \underline{\underline{f_0 \cdot \frac{\eta \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{4}}}$$

c) Ideales Bandpass: $P_i = 2 \cdot \frac{\eta}{2} \cdot B$

$$P_i = P_Y \Rightarrow \eta \cdot B = \frac{1}{4} \cdot f_0 \cdot \eta \cdot \sqrt{2}\,\pi$$

$$\underline{\underline{B = \frac{f_0 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{4}}}$$

d) $$S_{YY}(f) = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^4}$$

$$\downarrow$$

$$R_{YY}(\tau) = \underline{\underline{\frac{\eta}{2} \cdot \pi \cdot f_0 \cdot e^{-\sqrt{2}\pi f_0 |\tau|} \cdot \cos\left(\sqrt{2}\pi f_0 |\tau| + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

e) $$\underline{H}(f=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_Y = 0$$

$$P_Y = f_0 \cdot \frac{\eta\sqrt{2\pi}}{4} \quad \Rightarrow \quad \sigma_Y = \sqrt{f_0 \frac{\eta\sqrt{2\pi}}{4}}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \cdot e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \cdot f_0 \cdot \eta}} \cdot e^{-2 \cdot \frac{y^2}{f_0 \eta \sqrt{2\pi}}}}}$$

Aufgabe 12

a) $$E[\cos(\phi)] = \frac{1}{4}\left(\cos(\varphi) + \cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) + \cos(\varphi+\pi) + \cos(\varphi+\frac{3}{2}\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(\varphi) + (-\sin(\varphi)) + (-\cos(\varphi)) + \sin(\varphi)\right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$E[\sin(\phi)] = \underline{\underline{0}}$$

$$E[\cos^2(\phi)] = \frac{1}{4}\left(\cos^2(\varphi) + (-\sin(\varphi))^2 + (-\cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)\right)$$

$$= \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$E[\sin^2(\phi)] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$E[\sin(\phi)\cdot\cos(\phi)] = \frac{1}{4}\cdot\Big[\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\Big]$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

b) $E[X(t)] = E[\sin(2\pi f_0 t + \phi)]$

$$= E[\sin(2\pi f_0 t)\cos(\phi) + \cos(2\pi f_0 t)\sin(\phi)]$$

$$= \sin(2\pi f_0 t)\cdot E[\cos(\phi)] + \cos(2\pi f_0 t) E[\sin(\phi)]$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

c) $E[X(t_1)X(t_2)] = E[\sin(2\pi f_0 t_1 + \phi)\cdot \sin(2\pi f_0 t_2 + \phi)]$

$$= \frac{1}{2} E[\cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2)) - \cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) + 2\phi)]$$

$$= \frac{\cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2))}{2} - \frac{1}{2} E[\cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2))\cos(2\phi)]$$

$$+ \frac{1}{2} E[\sin(2\pi f_0 (t_1 + t_2))\sin(2\phi)]$$

$$= \frac{\cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2))}{2}$$

$$- \frac{\cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2))}{2} \cdot E[\cos(2\phi)]$$

$$+ \frac{\sin(2\pi f_0 (t_1 + t_2))}{2} \cdot E[\sin(2\phi)]$$

$$= \underline{\underline{\frac{\cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2))}{2}}}$$

Aufgabe 13

a) $$P = \frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(f)|^2 \, df$$

$$\underline{H}_1(f) = \tau \cdot \frac{1}{1 + j2\pi f \tau}$$

$$|H_1(f)|^2 = \frac{\tau^2}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(f)|^2 \, df = \frac{\tau^2}{\sqrt{4\pi^2\tau^2}} \cdot \arctan\left(\sqrt{4\pi^2\tau^2} \cdot f\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{\tau}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad P = \underline{\underline{\frac{\tau}{4} \cdot \eta}}$$

b) $$P = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_2(f)|^2 \, df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \, df$$

$$= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \frac{f_0}{\sqrt{2}} \cdot dx = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot f_0 \cdot \frac{\eta}{2}}}$$

Alternativer Lösungsweg für a):

$$P = \frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^2(t) \, dt = \frac{\eta}{2} \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-2 \cdot \frac{t}{\tau}} \, dt = -\frac{\eta}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{t}{\tau}} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{\eta \cdot \tau}{4}$$